1. 사차방정식 $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$의 모든 실근의 곱은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^4 + 3x^2 - 10 = 0$에서

$x^2 = t$로 치환하면

$t^2 + 3t - 10 = 0$, $(t+5)(t-2) = 0$

$\therefore\ t = -5$ 또는 $t = 2$

$\therefore\ x = \pm\sqrt{5}i$ 또는 $x = \pm\sqrt{2}$

따라서 모든 실근의 곱은

$\sqrt{2} \times (-\sqrt{2}) = -2$

2. 삼차방정식 $x^3 - 2x^2 + 4x + 3 = 0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$\alpha+\beta+\gamma=2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4$, $\alpha\beta\gamma=-3$이므로

$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$

$=1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\beta)-\alpha\beta\gamma$

$=1-2+4+3=6$

3. 방정식 $2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2 = 0$을 풀면?

① $x = -1$ (중근), $-\frac{1}{2}$, 2

② $x = -1$ (중근), $\frac{1}{2}$, 1

③ $x = -1$ (중근), $\frac{1}{2}$, 2

④ $x = -1$, $\frac{1}{2}$, 2 (중근)

⑤ $x = -1$, $\frac{1}{2}$ (중근), 2

해설

$f(x) = 2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2$ 라 하면 $f(-1) = 0$, $f(2) = 0$ 이므로 $(x+1)(x-2)$ 를 인수로 갖는다.

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & -1 & -6 & -1 & 2 \\
-1 & & -2 & 3 & 3 & -2 \\
\hline
 & 2 & -3 & -3 & 2 & \boxed{0} \\
2 & & 4 & 2 & -2 & \\
\hline
 & 2 & 1 & -1 & \boxed{0} &
\end{array}
$$

조립제법에 의하면 주어진 방정식은

$(x+1)(x-2)(2x^2 + x - 1) = 0$

$(x+1)^2(x-2)(2x-1) = 0$

$\therefore\ x = -1,\ \frac{1}{2},\ 2$

4. 방정식 $x^3 - x^2 + ax - 1 = 0$의 한 근이 -1일 때, 상수 a의 값과 나머지 두 근을 구하면?

① $a = 3, 1 \pm \sqrt{2}$

② $a = -3, 1 \pm \sqrt{2}$

③ $a = 3, 1 \pm \sqrt{3}$

④ $a = -3, 1 \pm \sqrt{3}$

⑤ $a = -1, 1 \pm \sqrt{2}$

해설

$x = -1$이 근이므로 $-1 - 1 - a - 1 = 0$에서 $a = -3$
인수정리와 조립제법을 이용하면
(좌변) $= (x + 1)(x^2 - 2x - 1) = 0$
$x^2 - 2x - 1 = 0$의 근은 $1 \pm \sqrt{2}$
$\therefore a = -3$, 나머지 근은 $1 \pm \sqrt{2}$

5. 삼차방정식 $x^3+x^2+ax+b=0$의 두 근이 $-3,\ 1-\sqrt{2}$일 때, 유리수 $a,\ b$의 합 $a+b$의 값은?

① -10 ② -5 ③ 0 ④ 5 ⑤ 10

해설

계수가 실수인 삼차방정식의 한 근이 $1-\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $1+\sqrt{2}$이다.

따라서, 근과 계수의 관계에 의하여

$$a=(1-\sqrt{2})\left(1+\sqrt{2}\right)+(-3)\left(1-\sqrt{2}\right)+(-3)\left(1+\sqrt{2}\right)=-7$$

$$b=-\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)(-3)=-3$$

$\therefore\ a+b=-10$

6. 삼차방정식 $(x+2)(x^2+2x-a+2)=0$의 실근이 -2뿐일 때, 실수 a 값의 범위를 구하면?

① $a<-3$ ② $a<1$ ③ $a>-1$

④ $a>2$ ⑤ $a>3$

해설

실근이 -2뿐이므로 $x^2+2x-a+2=0$은 허근을 갖는다.

$$\begin{aligned} D &= 2^2-4\times1\times(-a+2) \\ &= 4a-4<0 \end{aligned}$$

$\therefore a<1$

7. 삼차방정식 $x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = 0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta\gamma$의 값은?

① 10 ② 20 ③ 30 ④ 40 ⑤ 50

해설

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} = -\frac{(-8)}{1} = 8$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a} = \frac{17}{1} = 17$$

$$\alpha\beta\gamma = \frac{d}{a} = -\frac{(-10)}{1} = 10$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

$$= (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$$

$$= (8)^2 - 2 \cdot (17) = 30$$

$$-2\alpha\beta\gamma = -2 \cdot 10 = -20$$

$$\therefore\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta\gamma = 10$$

8. 삼차방정식 $x^3 - px + 2 = 0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\frac{\beta+\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma+\alpha}{\beta} + \frac{\alpha+\beta}{\gamma}$의 값은?

① $-p$　② p　③ 0　④ 3　⑤ -3

해설

$\alpha+\beta+\gamma=0$이므로 주어진 식은 $\frac{-\alpha}{\alpha}+\frac{-\beta}{\beta}+\frac{-\gamma}{\gamma}=-3$이 된다.

9. $x^2 - x + 1 = 0$일 때, x^{180}의 값을 구하면?

① 180 ② -180 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$x^2 - x + 1 = 0$양변에
$(x+1)$을 곱하면, $x^3 + 1 = 0$
$x^3 = -1 \Rightarrow x^{180} = (x^3)^{60} = (-1)^{60} = 1$

10. 삼차방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 w라 할 때, $-\dfrac{w+1}{w^2} + \dfrac{1+w^2}{w}$의 값을 구하면?

① 0　　② 1　　③ -1　　④ 2　　⑤ -2

해설

$x^3 = 1,$

$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1) = 0$

ω는 $x^2+x+1=0$의 한 근이 된다.

즉, $\omega^3 = 1,\quad \omega^2+\omega+1=0$

$$-\frac{\omega+1}{\omega^2} + \frac{1+\omega^2}{\omega}$$

$$= \frac{\omega^2}{\omega^2} + \frac{-\omega}{\omega}$$

$$= 1 - 1 = 0$$