

1. $2x^2 - 3x - 2 = a(x-1)(x+2) + bx(x+2) + cx(x-1)$ 이 x 에 대한 항등식이 되도록 a, b, c 의 값을 정하면?

① $a = 1, b = -1, c = 2$

② $a = -1, b = 1, c = -2$

③ $a = 1, b = 1, c = 2$

④ $a = -1, b = -1, c = -2$

⑤ $a = 1, b = -1, c = -2$

해설

수치대입법을 이용한다.

$$x = 0 \text{을 대입 } -2 = -2a \quad \therefore a = 1$$

$$x = 1 \text{을 대입 } -3 = 3b \quad \therefore b = -1$$

$$x = -2 \text{를 대입 } 12 = 6c \quad \therefore c = 2$$

2. $x^4 + 3x^2 + 4 = (x^2 + x + 2)(x^2 + ax + b)$ 일 때, 상수 a, b 의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$\begin{aligned}(\text{좌 변}) &= (x^2 + 2)^2 - x^2 \\ &= (x^2 + x + 2)(x^2 - x + 2)\end{aligned}$$

$$\therefore a = -1, b = 2$$

$$\therefore ab = -1 \times 2 = -2$$

3. $x^2 - 2x - y^2 + 2y$ 를 인수분해 하였더니 $(x + ay)(x - by + c)$ 가 된다고 할 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$$\begin{aligned} & x^2 - 2x - y^2 + 2y \\ &= (x^2 - y^2) - 2(x - y) \\ &= (x + y - 2)(x - y) \\ &= (x + ay)(x - by + c) \end{aligned}$$

계수를 비교하면

$$a = -1, b = -1, c = -2$$

$$\therefore a + b + c = -1 - 1 - 2 = -4$$

4. $x^3 - 4x^2 + x + 6$ 을 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x+c)$ 이다. $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ 이라 놓으면,

$x = -1$ 일 때, $-1 - 4 - 1 + 6 = 0$

따라서, $f(x)$ 는 $(x+1)$ 로 나누어 떨어진다.

즉, $f(x)$ 는 $(x+1)$ 의 인수를 갖는다.

즉, $f(x) = (x+1)Q(x)$ 몫

$Q(x)$ 는 조립제법으로 구한다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

$$f(x) = (x^2 - 5x + 6)(x + 1)$$

$$\therefore f(x) = (x - 3)(x - 2)(x + 1)$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = (-3)^2 + (-2)^2 + 1^2 = 14$$

5. 두 다항식 $x^2 - 4x + 3a + b$ 와 $x^2 + bx - 6$ 의 최대공약수가 $x - 2$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 8

해설

$$f(x) = x^2 - 4x + 3a + b,$$

$$g(x) = x^2 + bx - 6 \text{이라 하면}$$

$f(x)$ 와 $g(x)$ 는 모두 $x - 2$ 로 나누어떨어지므로

$$f(2) = g(2) = 0 \text{에서}$$

$$f(2) = 4 - 8 + 3a + b = 0, g(2) = 4 + 2b - 6 = 0$$

$$\therefore a = 1, b = 1 \therefore a + b = 2$$

6. 두 다항식 $A = a + 2b$, $B = 2a + 3b$ 일 때, $2A + B$ 를 구하는 과정에서 사용된 연산법칙 중 옳지 않은 것을 골라라.

$$\begin{aligned} 2A + B &= 2(a + 2b) + (2a + 3b) \\ &= (2a + 4b) + (2a + 3b) \quad \text{㉠ 분배법칙} \\ &= 2a + (4b + 2a) + 3b \quad \text{㉡ 결합법칙} \\ &= 2a + (2a + 4b) + 3b \quad \text{㉢ 교환법칙} \\ &= (2a + 2a) + (4b + 3b) \quad \text{㉣ 교환법칙} \\ &= (2 + 2)a + (4 + 3)b \quad \text{㉤ 분배법칙} \\ &= 4a + 7b \end{aligned}$$

▶ 답:

▷ 정답: ㉡

해설

$$\text{㉡ } 2a + (2a + 4b) + 3b = (2a + 2a) + (4b + 3b): \text{결합법칙}$$

7. $2x^4 - x^3 + 2x^2 + a$ 를 $x^2 + x + 1$ 로 나누어 떨어지도록 하는 상수 a 의 값을 구하면?

① -3

② 3

③ -6

④ 6

⑤ 12

해설

직접 나누어 본다.

$$\therefore a - 3 = 0, a = 3$$

해설

$x^2 + x + 1 = 0$ 이 되는 x 값을 대입한다.

$$x^2 + x + 1 = 0 \text{에서 } (x-1)(x^2 + x + 1) = 0, x^3 - 1 = 0$$

$$\therefore x^3 = 1$$

준 식의 좌변에 $x^3 = 1, x^2 = -x - 1$ 을 대입하면

$$2x - 1 + 2(-x - 1) + a = 0, a - 3 = 0$$

$$\therefore a = 3$$

8. 두 다항식 $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3)^3$, $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4)^3$ 의 x^3 의 계수를 각각 a , b 라 할 때, $a - b$ 의 값을 구하면?

① -21

② -15

③ -5

④ -1

⑤ 0

해설

$(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4)^3$ 의 전개식에서 x^4 항의 계수는 x^3 의 계수와는 관계가 없다.

따라서 $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3)^3$ 의 전개식에서 x^3 의 계수와 $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4)^3$ 의 전개식에서 x^3 의 계수는 같다.

$$\therefore a = b \quad \therefore a - b = 0$$

9. $a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=1$ 일 때, $4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$ 의 값은?

① $\frac{1}{4}$

② $\frac{1}{2}$

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$$

$$\therefore ab+bc+ca = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} & 4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \\ &= 4\{(ab+bc+ca)^2 - 2abc(a+b+c)\} \end{aligned}$$

$$= 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

10. 다음은 다항식 A 를 다항식 B 로 나누었을 때, 몫을 Q , 나머지를 R 라 하면 A 와 B 의 최대공약수는 B 와 R 의 최대공약수와 같음을 보인 것이다.

A 와 B 의 최대공약수를 G 라 하고,

$A = Ga, B = Gb$ (a, b 는 서로소)를

$A = BQ + R$ 에 대입하면

$$Ga = GbQ + R \quad \therefore R = G(a - bQ)$$

그러므로 (가)는 B 와 R 의 공약수이다.

그런데, a, b 는 서로소이므로 b 와 $a - bQ$ 사이에는 상수 이외의 (나)가 없다.

따라서 G 는 B 와 R 의 최대공약수이다.

(가), (나)에 알맞은 것을 차례로 쓰면?

① $a - bQ$, 공약수

② G , 공약수

③ G , 공배수

④ $a - bQ$, 공배수

⑤ G , 서로소

해설

$A = Ga, B = Gb$ 를 $A = BQ + R$ 에 대입하면 $Ga = GbQ + R$

$\therefore R = G(a - bQ)$ 그러므로 (G)는 B 와 R 의 공약수이다.

그런데 a, b 는 서로소이므로 b 와 $a - bQ$ 사이에는 상수 이외의 (공약수)가 없다.

11. 2가 아닌 모든 실수 x 에 대하여 $\frac{ax^2 + 4x + b}{x - 2}$ 의 값이 항상 일정하도록 상수 a, b 의 값을 정할 때, $a - b$ 의 값은?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$$\frac{ax^2 + 4x + b}{x - 2} = k \text{라 하면}$$

$$ax^2 + 4x + b = k(x - 2)$$

$$ax^2 + (4 - k)x + b + 2k = 0$$

x 에 대한 항등식이므로

$$a = 0$$

$$4 - k = 0 \text{에서 } k = 4$$

$$b + 2k = 0 \text{에서 } b = -8$$

$$\therefore a - b = 8$$

해설

주어진 식이 모든 x 에 대해 일정한 값을 가지려면

분자인 $ax^2 + 4x + b$ 가 분모인 ' $x - 2$ ' 만을 인수로 가져야 한다.

즉, 분자가 $k(x - 2)$ 가 되어야 한다.

$$\frac{ax^2 + 4x + b}{x - 2} = \frac{4(x - 2)}{x - 2} = 4$$

$$\therefore a = 0, b = -8 \text{에서 } a - b = 8$$

12. 모든 실수 x 에 대하여 등식 $x^{2007} + 1 = a_0 + a_1(x+4) + a_2(x+4)^2 + \cdots + a_{2007}(x+4)^{2007}$ 이 성립할 때, $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{2007}$ 의 값은?

① $(-3)^{2007} + 1$

② 0

③ $3^{2007} + 1$

④ 1

⑤ $3^{2007} + 3$

해설

양변에 $x = -3$ 을 대입하면

$$(-3)^{2007} + 1 = a_0 + a_1 + \cdots + a_{2007}$$

13. 1999개의 다항식 $x^2 - 2x - 1, x^2 - 2x - 2, \dots, x^2 - 2x - 1999$ 중에서 계수가 정수인 일차식의 곱으로 인수분해 되는 것은 모두 몇 개인가?

- ① 43 개 ② 44 개 ③ 45 개 ④ 46 개 ⑤ 47 개

해설

$x^2 - 2x - n = (x+a)(x-b)$ (a, b 는 자연수)라 하면 ($1 \leq n \leq 1999$ 인 자연수)

$$ab = n, a = b - 2$$

$\therefore n = 1 \cdot 3, 2 \cdot 4, 3 \cdot 5, \dots, 43 \cdot 45 (= 1935)$ 의 43 개

14. $P(x) = x^2 + x + 1$ 에 대하여 $P(x^6)$ 을 $P(x)$ 로 나눈 나머지를 구하면?

① $x - 4$

② $4x - 1$

③ 5

④ 4

⑤ 3

해설

$$P(x^6) = x^{12} + x^6 + 1$$

$x^2 + x + 1 = 0$ 의 해를 w 라 하자.

$w^2 + w + 1 = 0$, 양변에 $(w - 1)$ 을 곱하면

$$w^3 - 1 = 0, w^3 = 1$$

$$x^{12} + x^6 + 1 = (x^2 + x + 1)Q(x) + ax + b \text{ 에}$$

w 를 대입하면,

$$(w^3)^4 + (w^3)^2 + 1 = (w^2 + w + 1)Q(w) + aw + b$$

$$3 = aw + b$$

w 는 허수, a, b 는 실수 이므로, $a = 0, b = 3$

$\therefore$ 나머지 = 3

15. x 에 대한 다항식 $f(x)$ 를 $(x-3)^2$ 으로 나누면 나누어 떨어지고, $x+3$ 으로 나누면 4가 남는다고 한다. 이 때, $f(x)$ 를 $(x-3)^2(x+3)$ 으로 나눈 나머지는?

① $(x-3)^2$

② $3x^2 + 2x - 5$

③ $\frac{1}{5}(x-3)^2$

④ $x^2 + 2x - 5$

⑤ $\frac{1}{9}(x-3)^2$

해설

$$f(-3) = 4$$

$$f(x) = (x-3)^2(x+3)Q(x) + ax^2 + bx + c$$

$f(x) = (x-3)^2(x+3)Q(x) + a(x-3)^2$ ($\because f(x)$ 는 $(x-3)^2$ 으로 나누어 떨어진다.)

$$f(x) = (x-3)^2 \{(x+3)Q(x) + a\}$$

$$f(-3) = (-3-3)^2 a = 4$$

$$\therefore a = \frac{1}{9}$$

$$\therefore \text{구하는 나머지} : \frac{1}{9}(x-3)^2$$