1. 이차함수 $y = 2x^2 + kx - k$ 의 그래프가 x축과 만나도록 하는 상수 k 의 값이 아닌 것은?

① -8　　② -1　　③ 0　　④ 5　　⑤ 8

해설

이차방정식 $2x^2 + kx - k = 0$에서 $D = k^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-k) \geq 0$이어야 하므로

$k^2 + 8k \geq 0,\ k(k+8) \geq 0$

$\therefore k \leq -8$ 또는 $k \geq 0$

따라서 위의 k의 값의 범위에 속하지 않는 것은 ②이다.

2. 이차함수 $y = x^2 - 2(k-3)x + 4$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수 k의 값의 범위는?

① $k < 1$ ② $1 < k < 3$

③ $k < 3$ ④ $3 < k < 5$

⑤ $k < 1$ 또는 $k > 5$

해설

이차함수 $y = x^2 - 2(k-3)x + 4$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2 - 2(k-3)x + 4 = 0$ 의 판별식을 D라 하면 $D > 0$이어야 한다.

$\frac{D}{4} = (k-3)^2 - 4 > 0$

$k^2 - 6k + 5 > 0$, $(k-1)(k-5) > 0$

$\therefore k < 1$ 또는 $k > 5$

3. 직선 $y = mx - 4$가 이차함수 $y = 2x^2 - 3$ 의 그래프에 접하도록 하는 양수 m의 값은?

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $\sqrt{6}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

해설

이차방정식 $2x^2 - 3 = mx - 4$, 즉 $2x^2 - mx + 1 = 0$이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로

$D = (-m)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 0$

$m^2 - 8 = 0,\ m^2 = 8$

$\therefore m = 2\sqrt{2}(\because m > 0)$

4. 두 이차함수 $y = x^2$, $y = -x^2 - 2x - 1$의 그래프에 동시에 접하는 직선의 방정식을 $y = ax + b$라 할 때, 상수 a, b에 대하여 $a^3 + b^3$의 값은? (단, $a \neq 0$)

① -9 ② -8 ③ -7 ④ -6 ⑤ -5

해설

이차함수 $y = x^2$의 그래프와
직선 $y = ax + b$가 접하므로
이차방정식 $x^2 = ax + b$,
즉 $x^2 - ax - b = 0$의 판별식을 D_1이라 할 때,
$D_1 = (-a)^2 - 4 \cdot (-b) = 0$, $a^2 + 4b = 0$
$\therefore\ 4b = -a^2 \quad \cdots$ ㉠
또, 이차함수 $y = -x^2 - 2x - 1$의 그래프와
직선 $y = ax + b$가 접하므로
이차방정식$-x^2 - 2x - 1 = ax + b$,
즉 $x^2 + (a+2)x + b + 1 = 0$의 판별식을
D_2라 할 때,
$D_2 = (a+2)^2 - 4(b+1) = 0$
$\therefore\ a^2 + 4a - 4b = 0 \quad \cdots$ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면 $2a^2 + 4a = 0$
$2a(a+2) = 0 \qquad \therefore\ a = -2\ (\because\ a \neq 0)$
$a = -2$를 ㉠에 대입하면
$4b = -4 \qquad \therefore\ b = -1$
$\therefore\ a^3 + b^3 = (-2)^3 + (-1)^3 = -9$

5. 이차함수 $y=2x^2-3x+1$의 그래프와 직선 $y=ax+b$의 두 교점의 x좌표가 각각 1, 5일 때, 상수 a, b의 곱 ab의 값은?

① -81 ② -45 ③ 0 ④ 5 ⑤ 14

해설

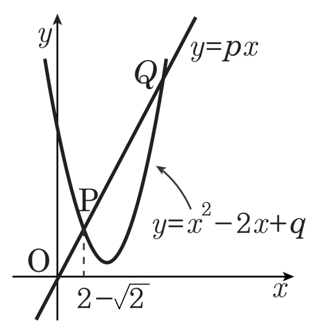
이차방정식 $2x^2-3x+1=ax+b$, 즉 $2x^2-(3+a)x+1-b=0$의 두 근이 1, 5이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$1+5=\frac{3+a}{2}$, $1\times 5=\frac{1-b}{2}$

$\therefore a=9,\ b=-9$

$\therefore ab=-81$

6. 다음 그림과 같이 직선 $y = px$ 와 이차함수 $y = x^2 - 2x + q$ 의 그래프가 두 점 P, Q 에서 만나고 점 P 의 x 좌표가 $2 - \sqrt{2}$ 이다. 이때, 유리수 p, q 의 곱 pq 의 값은?



① 1　　② 4　　③ 6　　④ 9　　⑤ 12

해설

두 점 P, Q 의 x 좌표는
이차방정식 $x^2 - 2x + q = px$ 의 두 실근이다.
$x^2 - (p+2)x + q = 0$ 에서 p, q 는 유리수이므로
한 근이 $2 - \sqrt{2}$ 이면 다른 한 근은 $2 + \sqrt{2}$ 이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여
$(2 - \sqrt{2}) + (2 + \sqrt{2}) = p + 2$
$\therefore\ p = 2$
$(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2}) = q$
$\therefore\ q = 2$
$\therefore\ pq = 4$

7. 이차함수 $y = x^2 - ax + k^2 + 2k$ 의 그래프와 직선 $y = 2kx + b$ 가 k 의 값에 관계없이 서로 접할 때, 실수 $a,\ b$ 의 곱 ab 의 값은?

① -6　　② -3　　③ -2　　④ 2　　⑤ 3

해설

$x^2 - ax + k^2 + 2k = 2kx + b$ 에서

$x^2 - (a + 2k)x + k^2 + 2k - b = 0$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$D = (a + 2k)^2 - 4(k^2 + 2k - b) = 0$

$a^2 + 4ak - 8k + 4b = 0$

이 식이 k 의 값에 관계없이 성립하므로

$4k(a - 2) + a^2 + 4b = 0$ 에서

$a - 2 = 0,\ a^2 + 4b = 0$

따라서 $a = 2,\ b = -1$ 이므로 $ab = -2$

8. 점 $(0,\ -2)$ 를 지나고 이차함수 $y = x^2 - 2x + 2$ 에 접하는 직선의 방정식을 구하면?

① $y = x - 1$ 또는 $y = -x - 2$

② $y = x - 2$ 또는 $y = -3x - 1$

③ $y = 2x - 2$ 또는 $y = -6x - 2$

④ $y = 3x - 3$ 또는 $y = x + 1$

⑤ $y = 4x - 4$ 또는 $y = 5x + 3$

해설

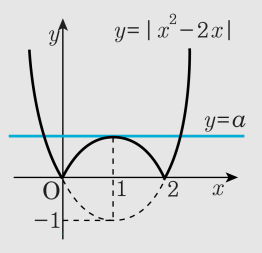
점 $(0,\ -2)$ 를 지나는 직선의 방정식을 $y = mx - 2$ 라 하고
이 식과 이차함수 $y = x^2 - 2x + 2$ 를 연립하면
$x^2 - 2x + 2 = mx - 2,\ x^2 - (m+2)x + 4 = 0$
이 이차방정식이 중근을 가지므로 판별식 $D = 0$ 이다.
$D = (m+2)^2 - 4 \cdot 4 = 0$
$m^2 + 4m - 12 = 0\ (m+6)(m-2) = 0$
$\therefore m = 2$ 또는 $m = -6$
따라서, 구하는 직선의 방정식은
$y = 2x - 2$ 또는 $y = -6x - 2$

9. 함수 $y = |x^2 - 2x|$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 상수 a 의 값은?

① $-\frac{1}{2}$　　② 0　　③ $\frac{1}{2}$　　④ 1　　⑤ 2

해설

함수 $y = |x^2 - 2x|$ 의 그래프를 그리면
아래 그림과 같다.



이때, 직선 $y = a$와 서로 다른 세 점에서 만나려면
직선 $y = a$ 가 포물선 $y = -x^2 + 2x$ 의
꼭지점을 지나야 한다.
$y = -x^2 + 2x = -(x - 1)^2 + 1$ 에서
꼭지점의 좌표는 $(1, 1)$ 이므로 $y = 1$
$\therefore\ a = 1$

10. 이차함수 $y=x^2+(k-3)x+k$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않을 때, 실수 k 의 값의 범위는?

① $-1<k<7$　② $-1<k<8$　③ $0<k<9$
④ $1<k<9$　⑤ $1<k<10$

해설

주어진 이차함수의 그래프가
x 축과 만나지 않으려면
이차방정식 $x^2+(k-3)x+k=0$ 이
실근을 갖지 않아야 하므로
$D=(k-3)^2-4k<0$
$k^2-10k+9<0$, $(k-1)(k-9)<0$
$\therefore\ 1<k<9$