1. $1 < x < 3$인 x에 대하여 방정식 $x^2 - [x]x - 2 = 0$의 해를 구하여라.
(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수)

① 2　　② $1 + \sqrt{2}$　　③ $1 + \sqrt{3}$

④ $\sqrt{5} - 1$　　⑤ $2\sqrt{2} - 1$

해설

(i) $1 < x < 2$일 때, $[x] = 1$
준식은 $x^2 - x - 2 = 0$, $(x - 2)(x + 1) = 0$
$\therefore\ x = -1$ 또는 $x = 2$
그런데 $1 < x < 2$이므로 만족하는 해가 없다.
(ii) $2 \le x < 3$일 때, $[x] = 2$
준식은 $x^2 - 2x - 2 = 0$이고 근의 공식에 의하여 $x = 1 \pm \sqrt{3}$
그런데 $2 \le x < 3$이므로 만족하는 해는
$x = 1 + \sqrt{3}$

2. 방정식 $x^2 - ax - 2 = 0$의 한 근이 $1 + i$일 때, a의 값은?

① -2 ② 2 ③ $-2i$ ④ 1 ⑤ $2i$

해설

다른 한 근을 α라고 하면
두 근의 곱은 $(1 + i)\alpha = -2$
따라서 $\alpha = -(1 - i) = -1 + i$
두 근의 합은 $(1 + i) + (-1 + i) = a$
$\therefore\ a = 2i$

3. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 1$ 일 때 최대이고 최댓값은 16 이다. 또, 그래프가 x 축과 만나는 두 점을 A, B 라고 할 때, $\overline{\mathrm{AB}} = 8$ 이다. 이 때, $|a| + |b| + |c|$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 1$ 일 때
최대이고 최댓값은 16 이므로
$y = ax^2 + bx + c = a(x-1)^2 + 16 = ax^2 - 2ax + a + 16\ (a < 0)$
$\therefore b = -2a,\ c = a + 16(a < 0) \cdots\cdots$ ㉠
$ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근을 $\alpha,\ \beta$ 라고 하면
$\overline{\mathrm{AB}} = |\beta - \alpha| = \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|} \cdots\cdots$ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $\dfrac{\sqrt{4a^2 - 4a(a+16)}}{-a} = 8$
$\therefore \sqrt{-64a} = -8a$ 양변을 제곱하면
$-64a = 64a^2,\ \ a^2 = -a,\ a(a+1) = 0$
그런데 $a < 0$ 이므로 $a = -1$
$\therefore b = -2a = 2,\ c = a + 16 = 15$
$\therefore |a| + |b| + |c| = 18$

4. 이차함수 $y = ax^2 - 6x + c$ 는 $x = -6$ 일 때, 최댓값 3 을 가진다. 이때, ac 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{15}{2}$

해설

$y = ax^2 - 6x + c$ 는 $x = -6$ 일 때,
최댓값 3 이므로
$y = a(x+6)^2 + 3 = ax^2 + 12ax + 36a + 3$
$12a = -6$, $36a + 3 = c$ 이므로
$a = -\frac{1}{2}$, $-18 + 3 = c$, $c = -15$
$\therefore ac = -\frac{1}{2} \times (-15) = \frac{15}{2}$

5. x 에 대한 이차방정식 $x^2+2ax-9+2a^2=0$ 이 실근 $\alpha,\ \beta$ 를 가질 때, $|\alpha-\beta|$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2+2ax-9+2a^2=0$ 에서
근과 계수와의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-2a,\ \alpha\beta=-9+2a^2$
$|\alpha-\beta|^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(-2a)^2-4(-9+2a^2)=-4a^2+36$
그런데 $\dfrac{D}{4}=a^2+9-2a^2\geq 0$
$\therefore\ \ -3\leq a\leq 3$
$\therefore\ \ 0\leq|\alpha-\beta|^2\leq 36$
즉, $0\leq|\alpha-\beta|\leq 6$
$\therefore$ (최댓값)+ (최솟값)$=0+6=6$

6. 합이 20 인 두 수의 곱이 최대가 될 때, 이 두 수를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

▷ 정답 : 10

해설

두 수를 각각 x, $20-x$라 하면

$y = x(20-x)$

$= -x^2 + 20x$

$= -(x-10)^2 + 100$

$x = 10$ 일 때, 최댓값 100을 갖는다.

$\therefore\ x = 10,\ 20 - x = 10$

따라서 두 수는 10, 10

7. 지면으로부터 20m 높이에서 초속 vm 로 쏘아 올린 공의 x 초 후의 높이를 ym 라 하면 x 와 y 사이에는 $y = 20 + \frac{v}{5}x - \frac{v}{10}x^2$ 의 관계가 있다. 공이 도달한 최고 높이가 25 m 일 때, 공의 속도를 구하여라.

▶ 답 : ______ m/s

▷ 정답 : 50 m/s

해설

$y = 20 + \frac{v}{5}x - \frac{v}{10}x^2 = -\frac{v}{10}(x-1)^2 + \frac{v}{10} + 20$

이 물체는 $x = 1$ 일 때, 최고 높이 $\frac{v}{10}+20$ 에 도달하고, $\frac{v}{10}+20 = 25$ 이므로 $v = 50$ 이다.

따라서 공의 속도는 초속 50m 이다.

8. 방정식 $x^2+x+2=0$의 한 허근을 ω라 할 때, $f(x)=ax^2+bx+12(a \neq 0)$에 대하여 $f(\omega)=3\omega$를 만족한다. 이 때, 실수 a, b의 합은?

① 12　② −12　③ 15　④ −15　⑤ 18

해설

$x^2+x+2=0$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^2+\omega+2=0 \quad \therefore \ \omega^2=-\omega-2$

$$f(\omega)=a\omega^2+b\omega+12=a(-\omega-2)+b\omega+12$$
$$=(b-a)\omega+(12-2a)$$

$f(\omega)=3\omega$이므로

$(b-a)\omega+(12-2a)=3\omega$

$b-a=3,\ 12-2a=0$ ($\because$ ω는 허수)

$\therefore \ a=6,\ b=9$

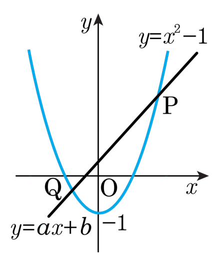
9. $x^2 + 5xy + ay^2 + y - 2$가 x, y의 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{8}{49}$ ② $\frac{49}{8}$ ③ 49 ④ 8 ⑤ 0

해설

$x^2 + 5xy + ay^2 + y - 2$를 x에 대해 정리하면
$x^2 + 5yx + ay^2 + y - 2$
이 이차식이 두 개의 일차식으로 인수분해 되려면
판별식이 완전제곱식이 되어야 한다.
$D = (25 - 4a)y^2 - 4y + 8$
$\frac{D'}{4} = 4 - 8(25 - 4a) = 0,$
$4 - 200 + 32a = 0$
$\therefore\ a = \frac{49}{8}$

10. 이차함수 $y=x^2-1$ 의 그래프와 직선 $y=ax+b$ 가 다음 그림과 같이 두 점 P, Q에서 만난다. 점 P의 x의 좌표가 $1+\sqrt{2}$일 때, $2a+b$의 값을 구하여라. (단, a, b 는 유리수이다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

이차함수 $y=x^2-1$ 의 그래프와 직선 $y=ax+b$ 의 한 교점 P 의 x 좌표가 $1+\sqrt{2}$ 이므로 $1+\sqrt{2}$ 는 이차방정식 $x^2-1=ax+b$ 의 근이다.

$\left(1+\sqrt{2}\right)^2-1=a\left(1+\sqrt{2}\right)+b$

$2+2\sqrt{2}=a+b+a\sqrt{2}$

a, b 가 유리수이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$2=a+b,\ 2=a$

$\therefore a=2,\ b=0$

11. 함수 $f(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b$ 의 그래프와 $g(x) = 3x - 4$ 의 그래프가 서로 다른 세 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) 에서 만난다고 한다. 이 때 $y_1 + y_2 + y_3$ 의 값은?

① -6　　② -5　　③ -4　　④ -3　　⑤ -2

해설

x_1, x_2, x_3 는 방정식 $x^3 - 2x^2 + ax + b = 3x - 4$
즉 $x^3 - 2x^2 + (a-3)x + b + 4 = 0$ 의 세 근 $x_1 + x_2 + x_3 = 2$
이 때, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 는
직선 $y = 3x - 4$ 위의 점이므로
$y_1 = 3x_1 - 4, y_2 = 3x_2 - 4, y_3 = 3x_3 - 4$

$$\begin{aligned} \therefore y_1 + y_2 + y_3 &= 3(x_1 + x_2 + x_3) - 12 \\ &= 3 \cdot 2 - 12 \\ &= -6 \end{aligned}$$

12. 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 최댓값이 9 이고 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 두 근이 $-2,\ 4$ 일 때, abc 의 값은? (단, $a,\ b,\ c$ 는 상수이다.)

① -10　　② -12　　③ -14　　④ -16　　⑤ -18

해설

$ax^2+bx+c=0$ 의 두 근이 $-2,\ 4$ 이므로

$$\begin{aligned} y &= ax^2+bx+c \\ &= a(x+2)(x-4) \\ &= a(x^2-2x-8) \\ &= a(x-1)^2-9a \end{aligned}$$

최댓값이 9 이므로 $-9a=9$

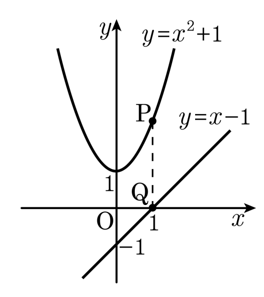
$\therefore a=-1$

따라서 구하는 이차함수는 $y=-x^2+2x+8$ 이고

$b=2,\ c=8$ 이다.

$\therefore abc=-1\times2\times8=-16$

13. 포물선 $y = x^2 + 1$ 위의 한 점P 에서 y 축에 평행인 직선을 그어 직선 $y = x - 1$ 과 만나는 점을 Q 라 할 때 $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 최솟값을 구하면?



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ $\frac{6}{5}$
④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$\overline{\mathrm{PQ}}$ 가 y 축에 평행하므로 점 P, Q 의 x 좌표는 같다. 이때, 점 P 의 좌표를 $(t,\ t^2 + 1)$ 이라고 하면, 점 Q 의 좌표는 $(t,\ t - 1)$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PQ}} &= t^2 + 1 - (t - 1)\\ &= t^2 - t + 2\\ &= \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\end{aligned}$$

따라서 $t = \frac{1}{2}$ 일 때, $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 최솟값은 $\frac{7}{4}$

14. 두 실수 $x,\ y$ 가 $x^2+y^2+2x-2y-2=0$ 을 만족할 때, x 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$x^2+y^2+2x-2y-2=0$ 을 y 에 대한 식으로 정리하면
$y^2-2y+\left(x^2+2x-2\right)=0$
$x,\ y$ 는 실수이므로 이 이차방정식은 실근을 갖는다.
$\frac{D}{4}=(-1)^2-\left(x^2+2x-2\right)\geq 0$
$x^2+2x-3\leq 0,\ \ (x+3)(x-1)\leq 0$
$\therefore -3\leq x\leq 1$, x 의 최댓값은 1 , 최솟값은 -3
따라서, 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 -2

15. $\begin{cases} |x| + x + y = 10 \\ x + |y| - y = 12 \end{cases}$ 일 때, $x + y$의 값은?

① -2　② 2　③ $\frac{18}{5}$　④ $\frac{22}{3}$　⑤ 22

해설

$|x| + x + y = 10$ $\cdots\cdots$ ㉠
$x + |y| - y = 12$ $\cdots\cdots$ ㉡
$x \le 0$ 이면, $y = 10,\ x = 12$
이것은 $x \le 0$ 을 만족하지 않는다.
$x > 0$ 이면 $2x + y = 10 \cdots\cdots$ ㉢
$y \ge 0$ 이면 $x = 12,\ y = -14$
이것은 $y \ge 0$ 을 만족하지 않는다.
$y < 0$ 이면, $x - 2y = 12 \cdots\cdots$ ㉣
㉢, ㉣에서 $x = \frac{32}{5}, y = -\frac{14}{5}$
$\therefore\ x + y = \frac{18}{5}$

16. x에 대한 두 이차방정식 $x^2+ax+b=0$, $x^2+bx+a=0$이 한 개의 공통근 α를 가지고, 공통이 아닌 두 근의 비가 $3:5$일 때, $a-b$의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$　② $-\frac{1}{3}$　③ $-\frac{1}{4}$　④ $-\frac{1}{5}$　⑤ 0

해설

공통근이 α이므로 $\alpha^2+a\alpha+b=0 \cdots$ ㉠
$\alpha^2+b\alpha+a=0 \cdots$ ㉡
㉠−㉡에서 $(a-b)(\alpha-1)=0$
$a=b$이면 모순이므로 $a \neq b$ $\therefore\ \alpha=1$
$x^2+ax+b=0,\ x^2+bx+a=0$의 공통이 아닌 근을 각각 $\beta,\ \gamma$라 하면 근과 계수와의 관계에 의하여 $1\cdot\beta=b,\ 1\cdot\gamma=a$
따라서, 공통이 아닌 두 근의 비는
$\beta : \gamma = b : a = 3 : 5 \cdots$ ㉢
한편, ㉠에 $\alpha=1$을 대입하면 $a+b+1=0 \cdots$ ㉣
㉢, ㉣에서 $a=-\frac{5}{8},\ b=-\frac{3}{8}$
$\therefore\ a-b=-\frac{1}{4}$

17. 실수 x, y에 대하여 $2x^2 + y^2 + 2xy + 2x - 2y + 5 = 0$일 때, xy 의 값은?

① -6　② -3　③ 0　④ 3　⑤ 6

해설

$2x^2 + y^2 + 2xy + 2x - 2y + 5 = 0$ 을
x 에 대한 내림차순으로 정리하면
$2x^2 + 2(y+1)x + y^2 - 2y + 5 = 0 \quad \cdots$ ㉠
이 때, x 는 실수이므로 ㉠은 실근을 가져야 한다.
$D = (y+1)^2 - 2\left(y^2 - 2y + 5\right) \geq 0$
$-y^2 + 6y - 9 \geq 0 \ \ (y-3)^2 \leq 0$
$\therefore y = 3$
$y = 3$을 ㉠에 대입하면
$2x^2 + 8x + 8 = 0,\ x^2 + 4x + 4 = 0$
$(x+2)^2 = 0$
$\therefore\ x = -2 \ \therefore\ xy = (-2) \cdot 3 = -6$

18. $|1-|1-|1-x||| = x-1$ 을 만족시키는 x 의 최솟값, 최댓값을 각각 m, M 이라 할 때, $m+M$ 의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x-1 = |1-|1-|1-x||| \geq 0$

$\therefore \; x \geq 1$

$x \geq 1$ 이면 $|1-x| = x-1$

$\therefore |1-|1-x|| = \left|1-(x-1)\right| = |2-x|$

$1 \leq x \leq 2$ 이면

$|2-x| = 2-x$ 이므로

$$\begin{aligned}(\text{좌변}) &= \left|1-(2-x)\right| \\ &= |x-1| \\ &= x-1 = (\text{우변})\end{aligned}$$

$\therefore \; 1 \leq x \leq 2$ 인 모든 실수 x

$\therefore \; m = 1,\; M = 2, \quad M + m = 3$

19. 방정식 $|x^2 + (a-2)x - 2| = 1$ 의 모든 근의 합이 0 일 때 상수 a 의 값은?

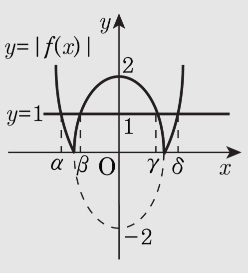
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$| x^2 + (a-2)x - 2 |= 1 \Leftrightarrow x^2 + (a-2)x - 2 = \pm 1$
$x^2 + (a-2)x - 2 = 1$ 의 두 근을 α, β 라 하면 $\alpha + \beta = -(a-2)$
$\ldots$ ㉠
$x^2 + (a-2)x - 2 = -1$ 의 두 근을 γ, δ 라 하면 $\gamma + \delta = -(a-2)$
$\ldots$ ㉡
㉠ + ㉡하면 $\alpha + \beta + \gamma + \delta = -2(a-2)$
모든 근의 합이 0 이므로 $a - 2 = 0 \therefore a = 2$

해설

$f(x) = x^2 + (a-2)x - 2$ 라 놓으면 y 절편이 -2 이므로 방정식 $|f(x)| = 1$ 의 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ 라 할 때 $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ 이기 위해서는$y = |f(x)|$ 의 그래프는 다음 그림과 같이 y 축에 대하여 대칭이다. (우함수)



$\therefore\ a - 2 = 0,\ a = 2$

20. α는 이차방정식 $ax^2-2ax+b=0$의 근이고 β는 이차방정식 $bx^2-2ax+a=0$의 근이라고 할 때, $\alpha+\dfrac{1}{\beta}$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

β 가 방정식 $bx^2-2ax+a=0$ 의 근이므로

$b\beta^2-2a\beta+a=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

$ax^2-2ax+b=0$에 $x=\dfrac{1}{\beta}$ 를 대입하면,

㉠에 의해서

$$a\left(\frac{1}{\beta}\right)^2-2a\left(\frac{1}{\beta}\right)+b=\frac{1}{\beta^2}(b\beta^2-2a\beta+a)=0$$

따라서, $x=\dfrac{1}{\beta}$은 방정식 $ax^2-2ax+b=0$의 근이다.

그런데 α도 이 방정식 $ax^2-2ax+b=0$의 근이므로 방정식 $ax^2-2ax+b=0$의 두 근은 α와 $\dfrac{1}{\beta}$이다.

따라서, 이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해서 $\alpha+\dfrac{1}{\beta}=2$

21. 4차방정식 $x^4+(m+2)x^2+m+5=0$이 서로 다른 네 개의 실근을 갖기 위한 정수 m의 값의 개수는?

① 0개　② 1개　③ 2개　④ 3개　⑤ 4개

해설

$x^2=X$로 놓으면

$X^2+(m+2)X+m+5=0\cdots\cdots$①이 서로 다른 양의 실근을 가질 때,

준 방정식은 서로 다른 네 실근을 가지므로

①의 두 근을 α, β라 할 때,

$D=(m+2)^2-4(m+5)>0$, $\alpha+\beta=-(m+2)>0$, $\alpha\beta=m+5>0$

이 세 식을 동시에 만족시키는 범위는

$-5<m<-4$

22. 어느 공장에서 생산하는 제품은 50 개를 생산할 때까지는 개당 5000 원의 비용이 들어가고 51 개 부터는 생산량이 1 개씩 증가할 때마다 개당 10 원씩 추가로 감소한다. 예컨대 51 개, 52 개의 제품을 생산할 때의 생산 비용이 각각 개당 4990 원, 4980 원이다. 이 때 총 생산 비용이 최대가 될 때의 개당 생산 비용을 구하여라.

▶ 답 : ____ 원

▷ 정답 : 2750 원

해설

생산량을 x개라 하면

(1) $x \leq 50$ 일 때

(총 생산 비용) $= 5000 \times x = 5000x$

따라서 $x = 50$ 일 때, 총 생산 비용의 최댓값은 250000 원이다.

(2) $x > 50$ 일 때

(개당 생산 비용) $= 5000 - 10(x - 50) - 10x + 5500$

$$\begin{aligned}(\text{총 생산 비용}) &= (5500 - 10x)x \\ &= -10x^2 + 5500x \\ &= -10(x - 275)^2 + 756250\end{aligned}$$

따라서 $x = 275$ 일 때, 총 생산 비용의 최댓값은 756250 원이다.

(1), (2)에 의하면 생산량 275 개일 때, 총 생산 비용이 최대이다.

이 때, 개당 생산 비용은 2750 원이다.

23. 한 근이 $1+\sqrt{3}i$ 인 방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 과 방정식 $x^2+ax+2=0$ 이 오직 한 개의 공통 실근을 가질 때, $a-b+c$ 의 값은? (단, a, b, c 는 실수)

① -14 ② -13 ③ -12 ④ -11 ⑤ -9

해설

$1+\sqrt{3}i$가 근이므로 $1-\sqrt{3}i$ 도 근이다. 이때, 또 한 근을 α 라 하면 근과 계수 관계에서

$(1+\sqrt{3}i)+(1-\sqrt{3}i)+\alpha=-a \cdots\cdots$ ㉠

$(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)+(1+\sqrt{3}i)\alpha+(1-\sqrt{3}i)\alpha=b \cdots\cdots$ ㉡

$(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)\alpha=-c \cdots\cdots$ ㉢

또, 방정식 $x^2+ax+2=0$ 과의 공통근이 α 이므로

$\alpha^2+a\alpha+2=0 \cdots\cdots$ ㉣

㉠에서 $\alpha=-a-2$ 를 ㉣에 대입하면

$(-a-2)^2+a(-a-2)+2=0$

$\therefore a=-3,\ \alpha=1$

㉡에서 $b=2\alpha+4=6$

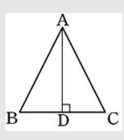
㉢에서 $c=-4\alpha=-4$

$\therefore\ a-b+c=-3-6-4=-13$

24. $\overline{AB} = \overline{AC}$인 이등변삼각형 ABC의 꼭지점 A에서 변 BC에 그은 수선의 발을 D라 하자. 삼각형 ABC의 둘레의 길이는 높이 AD의 길이의 4배이다. 이 때, $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BD}}$의 값은?

① $\dfrac{4}{3}$ ② $\dfrac{5}{3}$ ③ 2
④ $\dfrac{1+\sqrt{17}}{3}$ ⑤ $\dfrac{1+\sqrt{9}}{3}$

해설



$\overline{AB} = \overline{AC} = a$, $\overline{BC} = 2b$, $\overline{AD} = h$라 놓으면

$2a + 2b = 4h \cdots\cdots$ (i)

$a^2 = b^2 + h^2 \cdots\cdots$ (ii)

(i)에서 $h = \dfrac{a+b}{2}$를 (ii)에 대입하여 정리하면

$3a^2 - 2ab - 5b^2 = 0 \cdots\cdots$ (iii)

(iii) 식의 양변을 b^2으로 나누고

$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \dfrac{a}{b} = x$라 놓으면

$3x^2 - 2x - 5 = 0$

$\therefore (x+1)(3x-5) = 0$

$\therefore x = \dfrac{5}{3} (\because x > 0)$

25. 부등식 $4 \le x \le y \le z$을 만족하는 자연수 $x,\ y,\ z$에 대하여 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$이 성립할 때, $(x,\ y,\ z)$의 개수를 구하면?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$\frac{1}{x}=\frac{1}{4}$일 때, $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{4},\ \frac{y+z}{yz}=\frac{1}{4}$

$yz=4(y+z),\ (y-4)(z-4)=16$

$4 \le x \le y \le z$이므로

$(x,y,z)=(4,5,20),(4,6,12),(4,8,8)$

$\frac{1}{x}=\frac{1}{5}$일 때, $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{10}$에서 $\frac{1}{y}=\frac{1}{5},\ \frac{1}{z}=\frac{1}{10}$

$\therefore\ (x,y,z)=(5,5,10)$

$\frac{1}{x}=\frac{1}{6}$일 때, $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{3}\ \frac{y+z}{yz}=\frac{1}{3}$

$yz=3(y+z),\ (y-3)(z-3)=9$

$4 \le x \le y \le z$이므로

$(x,y,z)=(6,6,6)$ $x=y=z=6$이므로

$x>6$이면 $4 \le x \le y \le z$를 만족하지 않는다.

따라서, 주어진 조건을 만족하는 자연수

(x,y,z)는 $(4,5,20),\ (4,6,12),\ (4,8,8),\ (5,5,10),\ (6,6,6)$ 5개이다.