1. 두 다항식 $A,\ B$에 대하여 연산 $A \ominus B$와 $A \otimes B$을 다음과 같이 정의하기로 한다.

$A \ominus B = A - 3B,\ A \otimes B = (A+B)B$

$P = 2x^3 + 2x^2y + 3xy^2 - y^3,\ Q = x^3 + x^2y + xy^2$이라 할 때,

$(P \ominus Q) \otimes Q$를 x, y에 관한 다항식으로 나타내면?

① $x^4y^2 + xy^5$　② $x^4y^2 - xy^5$　③ $x^3y^2 - xy^4$

④ $x^3y^2 + xy^4$　⑤ $2x^3y^2 - xy^4$

해설

정의에 따라 $(P \ominus Q) \otimes Q$를 변형하면

$$\begin{aligned}(P \ominus Q) \otimes Q &= (P - 3Q) \otimes Q \\ &= (P - 3Q + Q)Q \\ &= (P - 2Q)Q \quad \cdots \text{①}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&P - 2Q \\ &= 2x^3 + 2x^2y + 3xy^2 - y^3 - 2(x^3 + x^2y + xy^2) \\ &= xy^2 - y^3\end{aligned}$$

이므로 ①식은

$$\begin{aligned}(P \ominus Q) \otimes Q &= (xy^2 - y^3)(x^3 + x^2y + xy^2) \\ &= x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 - x^3y^3 \\ &\quad - x^2y^4 - xy^5 \\ &= x^4y^2 - xy^5\end{aligned}$$

2. $(6x^3 - x^2 - 5x + 5) \div (2x - 1)$ 의 몫을 a, 나머지를 b라 할 때, $a + b$를 구하면?

① $3x^2 + x + 1$　② $x^2 + x + 1$　③ $3x^2 + 1$
④ $x^2 + x - 1$　⑤ $3x^2 + x$

해설

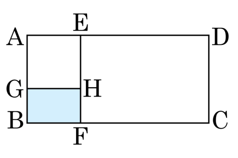
나눗셈을 이용하면 $a = 3x^2 + x - 2$, $b = 3$
$\therefore\ a + b = 3x^2 + x + 1$

해설

조립제법을 이용할 수 있다.
이 때, $2x - 1$로 나눈 몫은 $x - \frac{1}{2}$로 나눈 몫의 $\frac{1}{2}$이고 나머지는 같다.

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x - \frac{1}{2}\right) Q(x) + R \\ &= (2x - 1) \cdot \frac{1}{2} \cdot Q(x) + R \end{aligned}$$

3. 다음 그림의 사각형 AGHE, 사각형 EFCD는 정사각형이고, $\overline{AD} = a$, $\overline{AB} = b$일때, 사각형 GBFH의 넓이는?



① $a^2 - 2ab - b^2$

② $a^2 + 3b^2 - 2ab$

③ $-a^2 + 3ab - 2b^2$

④ $-a^2 + 3ab - b^2$

⑤ $-a^2 + 2ab - b^2$

해설

$\square GBFH = \square ABCD - \square AGHE - \square EFCD$
$= ab - (a-b)^2 - b^2 = ab - (a^2 - 2ab + b^2) - b^2$
$= -a^2 + 3ab - 2b^2$

4. $(x+y)a-(x-y)b-(y-z)c-4z=0$이 $x,\ y,\ z$의 값에 관계없이 항상 성립할 때, 곱 abc를 구하면?

① 4 ② 8 ③ 16 ④ 32 ⑤ 64

해설

x, y, z에 대해 정리하면
$(a-b)x+(a+b-c)y+(c-4)z=0$
$x,\ y,\ z$에 대한 항등식이므로
$a=b,\ a+b-c=0,\ c=4$
$\therefore\ a=b=2,\ c=4$
$\therefore\ abc=16$

5. a, b는 정수이고, ax^3+bx^2+1이 x^2-x-1로 나누어 떨어질 때, b의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

전개했을 때 양변의 최고차항과 상수항이 같아야 하므로

ax^3+bx^2+1

$=(x^2-x-1)(ax-1)$

$=ax^3-(1+a)x^2+(1-a)x+1$

양변의 계수를 비교하면

$-(1+a)=b, 1-a=0$

$\therefore \quad a=1, b=-2$

6. x^3 의 항의 계수가 1 인 삼차 다항식 $P(x)$ 가 $P(1) = P(2) = P(3) = 0$ 을 만족할 때, $P(4)$ 의 값은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

인수정리에 의해
$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$
$P(4) = 3 \times 2 \times 1 = 6$

7. $f(x) = 3x^3 + px^2 + qx + 12$ 가 $x+2$ 로도 나누어떨어지고, $x-1$ 로도 나누어떨어질 때, $\frac{q}{p}$ 의 값은?

① 9 ② 4 ③ −9 ④ −3 ⑤ −12

해설

$f(-2) = -24 + 4p - 2q + 12 = 0$
$f(1) = 3 + p + q + 12 = 0$
$p = -3,\ q = -12,\ \frac{q}{p} = \frac{-12}{-3} = 4$

8. 다항식 $2x^3 + ax^2 + bx + 3$ 이 다항식 $2x^2 - x - 3$ 으로 나누어 떨어질 때, $a + b$ 의 값은 ?

① 3　　② 1　　③ −1　　④ −2　　⑤ −5

해설

$$\begin{aligned} 2x^3 + ax^2 + bx + 3 &= (2x^2 - x - 3)Q(x) \\ &= (x+1)(2x-3)Q(x) \end{aligned}$$

$x = -1$ 일 때, $-2 + a - b + 3 = 0$

$\therefore\ a - b = -1 \cdots$ ㉠

$x = \dfrac{3}{2}$ 일 때, $\dfrac{27}{4} + \dfrac{9}{4}a + \dfrac{3}{2}b + 3 = 0$

$27 + 9a + 6b + 12 = 0$

$\therefore\ 3a + 2b = -13 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡ 에서 $a = -3,\ b = -2$

$\therefore\ a + b = (-3) + (-2) = -5$

9. 다항식 $x^5\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)$의 차수는?

① 2차 ② 3차 ③ 6차 ④ 7차 ⑤ 8차

해설

$x^5\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)$

$=x^2(x^2+1)(x^2+2x+3)$

$\therefore$ 6차 다항식

10. 다항식 $f(x) = 4x^3 + ax^2 + x + 1$을 $x + \frac{1}{2}$로 나누면 나머지가 1일 때, 다항식 $f(x)$를 $2x + 1$로 나눈 몫 $Q(x)$와 나머지 R을 구하면?

① $Q(x) = 2x^2 - x,\ R = 1$　② $Q(x) = 2x^2 + x,\ R = 1$
③ $Q(x) = 2x^2 - 2x,\ R = 1$　④ $Q(x) = 4x^2 - 2x,\ R = \frac{1}{2}$
⑤ $Q(x) = 4x^2 + 2x,\ R = \frac{1}{2}$

해설

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 = \frac{a}{4} \therefore a = 4$

따라서 $f(x) = 4x^3 + 4x^2 + x + 1$
$= x(4x^2 + 4x + 1) + 1$
$= x(2x + 1)^2 + 1$

$2x + 1$로 나누면 $Q(x) = 2x^2 + x,\ R = 1$

11. 다음 식 중에서 옳지 않은 것을 고르면?

① $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

② $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3+b^3+c^3-3abc$

③ $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

④ $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

⑤ $(a^2+a+1)(a^2-a+1) = a^4-a^2+1$

해설

⑤ $$(a^2+a+1)(a^2-a+1) = (a^2+1)^2-a^2$$
$$= a^4+a^2+1$$

12. $a = 2004$, $b = 2001$ 일 때, $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ 의 값은?

① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

해설

준 식은 $(a-b)^3$ 이다.
$a - b = 2004 - 2001 = 3$
$\therefore\ (a-b)^3 = 3^3 = 27$

13. $a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=1$ 일 때, $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ 의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ 1 ⑤ 4

해설

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ 에 대입하면

$ab+bc+ca=-\frac{1}{2}$

$(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$

$\frac{1}{4}=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$

따라서 $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=\frac{1}{4}$

14. $\dfrac{2x+3a}{4x+2}$ 가 x에 관계없이 일정한 값을 가질 때, a의 값을 구하면? $\left(\text{단, } x \neq -\dfrac{1}{2}\right)$

① 1　② $\dfrac{1}{2}$　③ $\dfrac{1}{3}$　④ $\dfrac{1}{4}$　⑤ $\dfrac{1}{5}$

해설

$\dfrac{2x+3a}{4x+2} = k$ (일정) 라 놓으면

$2x+3a = k(4x+2)$ 에서 $(2-4k)x + (3a-2k) = 0$

이 식은 x에 대한 항등식이므로

$2-4k = 0$, $3a-2k = 0$

$\therefore\ k = \dfrac{1}{2}$ 이므로 $a = \dfrac{1}{3}$

15. x에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+3이 x^2+1로 나누어떨어질 때, $a+b$의 값을 구하면?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$x^3+ax^2+bx+3=(x^2+1)(x+k)$라 할 수 있다.
여기에서 상수항을 비교하면 $k=3$
$x^3+ax^2+bx+3=(x^2+1)(x+3)$
$=x^3+3x^2+x+3$
$\therefore\ a=3,\ b=1$이므로 $a+b=4$

해설

$x^3+ax^2+bx+3=(x^2+1)Q(x)$
$x^2=-1$을 대입하면
$-x-a+bx+3=0,\ (b-1)x+(3-a)=0$
x에 대한 항등식이므로
$a=3,\ b=1$
$\therefore\ a+b=4$

16. 다항식 $(x+2)f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지가 9, 다항식 $(2x-3)f(3x-7)$을 $x-3$으로 나눈 나머지가 -3이다. 이때 다항식 $f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나눈 나머지는?

① $-4x+7$ ② $-4x-3$ ③ $2x+3$
④ $2x-3$ ⑤ $3x-1$

해설

나머지정리에 의하여
$(x+2)f(x)$에 $x=1$을 대입하면
$3f(1)=9$이므로 $f(1)=3\cdots$㉠
$(2x-3)f(3x-7)$에 $x=3$을 대입하면
$3f(2)=-3$이므로 $f(2)=-1\cdots$㉡
$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$에 ㉠, ㉡을 대입하면

$$\begin{cases} a+b=3 \\ 2a+b=-1 \end{cases}$$

이므로 $a=-4,\ b=7$

17. x에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+c를 $x-1$로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. $i=1$일 때, $a+b+c$의 값을 옳게 구한 것은?

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & a & b & c \\ & & d & e & f \\ \hline & 1 & g & h & \boxed{i} \end{array}$$

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

다항식 x^3+ax^2+bx+c를 $x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & a & b & c \\ & & 1 & a+1 & a+b+1 \\ \hline & 1 & a+1 & a+b+1 & \boxed{a+b+c+1} \end{array}$$

이때 $a+b+c+1=1$이므로
$a+b+c=0$
따라서 ③이다.

18. $a=(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)\cdots(3^{1024}+1)$이라고 할 때 곱셈 공식을 이용하여 a의 값을 지수의 형태로 나타내면 $\frac{1}{k}(3^l+m)$이다. 이 때, $k+l+m$의 값을 구하면?

① 2046 ② 2047 ③ 2048 ④ 2049 ⑤ 2050

해설

$a=(3+1)\left(3^2+1\right)\cdots\left(3^{1024}+1\right)$

양변에 $(3-1)$을 곱하면

$(3-1)\,a=(3-1)(3+1)\left(3^2+1\right)\left(3^4+1\right)\cdots\left(3^{1024}+1\right)$

$$\begin{aligned}2a &= \left(3^2-1\right)\left(3^2+1\right)\left(3^4+1\right)\cdots\left(3^{1024}+1\right)\\ &= \left(3^4-1\right)\left(3^4+1\right)\cdots\left(3^{1024}+1\right)\\ &= \left(3^8-1\right)\cdots\left(3^{1024}+1\right)\\ &\ \ \vdots\\ &= \left(3^{2048}-1\right)\end{aligned}$$

양변을 2로 나누면

$a=\frac{1}{2}\left(3^{2048}-1\right)$

$\therefore\ k=2,\ l=2048,\ m=-1$

$\therefore\ k+l+m=2049$

19. 2가 아닌 모든 실수 x에 대하여 $\dfrac{ax^2+4x+b}{x-2}$의 값이 항상 일정하도록 상수 a, b의 값을 정할 때, $a-b$의 값은?

① 5　　② 6　　③ 7　　④ 8　　⑤ 9

해설

$\dfrac{ax^2+4x+b}{x-2}=k$라 하면

$ax^2+4x+b=k(x-2)$

$ax^2+(4-k)x+b+2k=0$

x에 대한 항등식이므로

$a=0$

$4-k=0$에서 $k=4$

$b+2k=0$에서 $b=-8$

$\therefore\ a-b=8$

해설

주어진 식이 모든 x에 대해 일정한 값을 가지려면
분자인 ax^2+4x+b가 분모인 '$x-2$' 만을 인수로 가져야 한다.
즉, 분자가 $k(x-2)$가 되어야 한다.

$\dfrac{ax^2+4x+b}{x-2}=\dfrac{4(x-2)}{x-2}=4$

$\therefore a=0,\ b=-8$에서 $a-b=8$

20. $(1-x-x^2)^{25} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{49}x^{49} + a_{50}x^{50}$이라 할 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{50}$의 값은?

① 0　② 1　③ 2^{24}　④ 2^{25}　⑤ 2^{50}

해설

$(1-x-x^2)^{25} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{50}x^{50}$

$x=1$을 양변에 대입하면

$-1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{50} \cdots$ ①

$x=-1$을 양변에 대입하면

$1 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_{49} + a_{50} \cdots$ ②

① + ②: $2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{50}) = 0$

$a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{50} = 0$

21. x^{30}을 $x-3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라 할 때, $Q(x)$의 상수항을 포함한 모든 계수들의 합을 구하면?

① $3^{30}+1$　② $3^{30}-1$　③ $\frac{1}{2}\left(3^{30}-1\right)$
④ $\frac{1}{3}\left(3^{30}-1\right)$　⑤ 0

해설

$x^{30}=(x-3)\,Q(x)+R$
양변에 $x=3$을 대입 하면, $3^{30}=R$
$x^{30}=(x-3)\,Q(x)+3^{30}$
양변에 $x=1$을 대입하면, $1=-2Q(1)+3^{30}$
$\therefore\ Q(1)=\frac{1}{2}\left(3^{30}-1\right)$
※ 다항식에서 상수항을 포함한 모든 계수의 합은 문자대신 1을 대입한 값과 같다.

22. 다항식 $f(x)$를 x^2-3x+2로 나눌 때의 나머지가 3이고, x^2-4x+3으로 나눌 때의 나머지가 $3x$일 때, $f(x)$를 x^2-5x+6으로 나눌 때의 나머지는?

① 3 ② $3x+3$ ③ $3x-3$

④ $6x-9$ ⑤ $9x+6$

해설

$f(x)=(x-2)(x-1)Q(x)+3$

$f(x)=(x-3)(x-1)Q'(x)+3x$

$\therefore$ $f(2)=3,\ f(3)=9$ $f(x)$를 x^2-5x+6으로 나눌 때의 나머지를 $ax+b$라 하면

$f(x)=(x-2)(x-3)Q''(x)+ax+b$

$f(2)=2a+b=3,\ f(3)=3a+b=9$

$a=6,\ b=-9$

$\therefore$나머지는 $6x-9$

23. 다항식 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)-2f(x+1)+f(x)=2x$, $f(0)=1$, $f(1)=0$이 성립할 때, $2a-b+2c-d$의 값은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$f(0)=1$이므로 $d=1$

$f(1)=0$이므로 $a+b+c=-1 \cdots$ ①

$f(x+2)-2f(x+1)+f(x)=2x$에서

$x=-1$을 대입하면 $f(-1)=0$이므로

$-a+b-c=-1 \cdots$ ②

$x=0$을 대입하면 $f(2)=-1$이므로

$8a+4b+2c=-2 \cdots$ ③

①, ②, ③을 연립하여 풀면

$\therefore\ a=\frac{1}{3},\ b=-1,\ c=-\frac{1}{3},\ d=1$

$\therefore\ 2a-b+2c-d=0$

24. 함수 $f(n) = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ 으로 정의할 때, $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(2007)$ 을 10 으로 나눈 나머지는?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(2007)$ 의 일의 자리만 보면 된다.
$f(5)$ 이후부터는 10 으로 나누어떨어지므로
10 으로 나누어떨어지지 않는 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ 까지 더하면
$1 + 2 + 6 + 24 = 33$
따라서 $f(1) + f(2) + \cdots + f(2007)$ 을 10 으로 나눈 나머지는 3 이다.

25. $(x-2)^4 = a(x-3)^4 + b(x-3)^3 + c(x-3)^2 + d(x-3) + e$ 가 x 에 대한 항등식일 때, $2c - bd$ 의 값은?

① -8　　② -4　　③ 0　　④ 4　　⑤ 8

해설

x 에 대한 항등식 이므로 x 에 대한 적당한 수를 넣어 식을 만든다.

i) $x = 3 \Rightarrow e = 1$
ii) $x = 2 \Rightarrow a - b + c - d + 1 = 0$
iii) $x = 4 \Rightarrow a + b + c + d + 1 = 16$
iv) $x = 4 \Rightarrow 16a - 8b + 4c - 2d + 1 = 1$
v) $x = 5 \Rightarrow 16a + 8b + 4c - 2d + 1 = 1$

위 5개의 식을 연립하여 a, b, c, d 의 값을 구한다.

$a = 1,\ b = 4,\ c = 6,\ d = 4,\ e = 1$

$\therefore 2c - bd = -4$

해설

$x - 2 = t$ 라 하면 $x - 3 = t - 1$

(준식) : $t^4 = a(t-1)^4 + b(t-1)^3 + c(t-1)^2 + d(t-1) + e$

다음처럼 조립제법으로 $t - 1$ 로 계속 나눌 때, 나오는 나머지가 순서대로 e, d, c, b 이고 마지막 몫이 a 이다.

$$
\begin{array}{r|rrrrl}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
  &   & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \boxed{1} = e \\
  &   & 1 & 2 & 3 & \\ \hline
1 & 1 & 2 & 3 & \boxed{4} = d & \\
  &   & 1 & 3 & & \\ \hline
1 & 1 & 3 & \boxed{6} = c & & \\
  &   & 1 & & & \\ \hline
\multicolumn{2}{l}{a = 1} & \boxed{4} = b & & &
\end{array}
$$

$\therefore 2c - bd = -4$