1. 다음 중 명제가 아닌 것은?

① $2(x-3)=-x+5+3x$

② $x>-1$ 이면 $x>0$ 이다.

③ x가 실수이면 $x^2 \geq 0$ 이다.

④ $x^2+4x-5=0$

⑤ $x=2$ 이면 $x^3=8$ 이다.

해설

참인 명제 : ③, ⑤
거짓인 명제 : ①, ②
④의 경우 $x=-5$ 또는 $x=1$ 일 때는 참이고, 그 외의 경우는 거짓이므로 명제가 아니다.

2. 전체집합 U 에서 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 할 때, 명제 $\sim p \rightarrow q$ 가 참일 때, 다음 중 옳지 않은 것은? (단, $U \neq \varnothing$)

① $P^c \subset Q$　② $P \cap Q = \varnothing$　③ $P^c \cap Q^c = \varnothing$

④ $P \cap Q^c = Q^c$　⑤ $P \cup Q = U$

해설

$\sim p \rightarrow q$를 확인하기 위해 대우의 참, 거짓을 판별하거나 포함관계를 본다.

$P^c \subset Q$ 이려면 $(P \cup Q)^c = \varnothing$ 이어야 한다.

$\therefore P \cup Q = U, P^c \cap Q^c = \varnothing$

$P \cap Q = \varnothing$ 는 알 수 없다.

3. 다음 명제 중 '역'이 참인 것을 고르면? (a, b, x, y 는 모두 실수)

① $a = 1$ 이면 $a^2 = a$

② $a = b$ 이면 $a^2 = b^2$

③ xy 가 홀수 이면 $x + y$ 가 짝수

④ $\triangle\mathrm{ABC}$ 가 정삼각형이면 $\angle\mathrm{B} = \angle\mathrm{C}$

⑤ 두 집합 A, B 에 대하여 $\mathrm{A} \supset \mathrm{B}$ 이면 $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{A}$

해설

① 역 : $a^2 = a$ 이면 $a = 1$ 이다.(거짓, 반례 : $a = 0$)
② 역 : $a^2 = b^2$ 이면 $a = b$ 이다. (거짓,반례 : $a = 1, b = -1$)
③ 역 : $x + y$ 가 짝수이면, xy 는 홀수이다. (거짓, x, y 모두 짝수인 경우 xy 는 짝수이다.)
④ 역 : $\angle\mathrm{B} = \angle\mathrm{C}$ 이면 $\triangle\mathrm{ABC}$ 는 정삼각형이다. (거짓, 두 각이 같으면 이등변삼각형이다.)
⑤역 : $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{A}$ 이면 $\mathrm{A} \supset \mathrm{B}$ 이다.(참)

4. 명제 'x 가 4의 배수이면 x 는 2의 배수이다' 의 대우는?

① x 가 2의 배수이면 x 는 4의 배수이다.

② x 가 2의 배수이면 x 는 4의 배수가 아니다.

③ x 가 4의 배수이면 x 는 2의 배수가 아니다.

④ x 가 4의 배수가 아니면 x 는 2의 배수가 아니다.

⑤ x 가 2의 배수가 아니면 x 는 4의 배수가 아니다.

해설

$p \to q$ 의 대우는 $\sim q \to \sim p$

5. $x-1=0$이 $2x^2+ax-1=0$이기 위한 충분조건일 때 상수 a의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x-1=0$이면 $2x^2+ax-1=0$이 참이므로
$x=1$을 대입하면 $2+a-1=0$
$\therefore a=-1$

6. 다음 빈 칸에 알맞은 말을 써 넣어라.

$A \cap B = A$ 인 것은 $A \subset B$ 이기 위한 $\boxed{\quad\quad}$ 조건이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : 필요충분

해설

$A \cap B = A$ 인 것이 곧, $A \subset B$ 을 의미하므로 명제와 역 모두 참이 되는 필요충분조건이다.

7. $x>0,\ y>0$ 일 때 두 식 $\sqrt{x}+\sqrt{y}$, $\sqrt{2(x+y)}$ 를 바르게 비교한 것은?

① $\sqrt{x}+\sqrt{y}<\sqrt{2(x+y)}$
② $\sqrt{x}+\sqrt{y}\le\sqrt{2(x+y)}$
③ $\sqrt{x}+\sqrt{y}>\sqrt{2(x+y)}$
④ $\sqrt{x}+\sqrt{y}\ge\sqrt{2(x+y)}$
⑤ $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2(x+y)}$

해설

$\sqrt{x}+\sqrt{y}>0,\ \sqrt{2(x+y)}>0$

이 때 $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2-\left\{\sqrt{2(x+y)}\right\}^2$

$=(x+y+2\sqrt{xy})-(2x-2y)$

$=-(x-2\sqrt{xy}+y)$

$=-(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\le 0$

이므로 $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2\le\left\{\sqrt{2(x+y)}\right\}^2$

$\therefore (\sqrt{x}+\sqrt{y})\le\sqrt{2(x+y)}$

(단, 등호는 $\sqrt{x}=\sqrt{y}$, 즉 $x=y$일때성립)

8. $a>0,\ b>0$일 때, 다음 식 $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{9}{a}\right)$의 최솟값을 구하면?

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

해설

$$\begin{aligned}\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{9}{a}\right) &= ab+9+1+\frac{9}{ab}\\ &= 10+ab+\frac{9}{ab}\\ &\geq 10+2\sqrt{ab\times\frac{9}{ab}}\\ &= 10+6=16\end{aligned}$$

따라서 최솟값은 16

9. $x \geq 0,\ y \geq 0$이고 $x+3y=8$일 때, $\sqrt{x}+\sqrt{3y}$의 최댓값은?

① 2 ② 3 ③ $\sqrt{10}$ ④ $\sqrt{15}$ ⑤ 4

해설

$x,\ y$가 실수이므로

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$(\sqrt{x}+\sqrt{3y})^2 \leq (1^2+1^2)\{(\sqrt{x})^2+(\sqrt{3y})^2\}$

$=2(x+3y)$

$=16$ (단, 등호는 $x=3y$일 때 성립)

그런데 $\sqrt{x}+\sqrt{3y} \geq 0$이므로

$0 \leq \sqrt{x}+\sqrt{3y} \leq 4$

따라서 $\sqrt{x}+\sqrt{3y}$의 최댓값은 4이다.

10. 전체집합이 $U = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

① 조건 '$x^2 - 6x + 8 = 0$' 의 진리집합은 $\{2,\ 3\}$ 이다.

② 조건 'x 는 소수이다.' 의 진리집합은 $\{1,\ 3,\ 5\}$ 이다.

③ 조건 'x 는 4 의 약수이다.' 의 진리집합은 $\{0,\ 1,\ 2,\ 4\}$ 이다.

④ 조건 '$0 \le x < 4$ 이고 $x \ne 2$ 이다.' 의 진리집합은 $\{0,\ 1,\ 3\}$ 이다.

⑤ 조건 'x 는 6 의 약수이다.' 의 진리집합은 $\{1,\ 2,\ 3\}$ 이다.

해설

① $x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ 또는 $x = 4$
, 따라서, 진리집합은 $\{2,\ 4\}$
② 소수는 2, 3, 5 이므로 진리집합은 $\{2,\ 3,\ 5\}$
③ 4 의 약수는 1, 2, 4 이므로 진리집합은 $\{1,\ 2,\ 4\}$
④ $x = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ 이고 $x \ne 2$ 이므로 진리집합은 $\{0,\ 1,\ 3\}$
⑤ 전체집합이 $U = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 이고 6 의 약수는 1, 2, 3, 6 이므로 진리집합은 $\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$

11. 다음 중 항상 참이라고 할 수 <u>없는</u> 것은?

① 자연수 n에 대하여, n^2이 짝수이면 n도 짝수 이다.

② 자연수 $n,\ m$에 대하여 n^2+m^2이 홀수이면, nm은 짝수이다.

③ 자연수 n에 대하여, n^2이 3의 배수이면, n은 3의 배수이다.

④ $a,\ b$가 실수일 때, $a+b\sqrt{2}=0$이면, $a=0$이다.

⑤ 두 실수 $a,\ b$에 대하여, $a+b>2$이면, $a>1$ 또는 $b>1$

해설

①, ③ : n^2이 p 의 배수이면, n은 p의 배수이다. (참)
② : 대우는 'nm 은 홀수이면 n^2+m^2 이 짝수이다.' nm은 홀수, 즉 n, m 모두 홀수이면 n^2, m^2 모두 홀수이므로 n^2+m^2은 짝수이다.
∴ 주어진 명제는 참
④ 반례 : $a=2\sqrt{2}, b=-1$
※ 주의) 주어진 명제가 참일 때는 $a,\ b$가 유리수라는 조건일 때임을 명심해야 한다.
⑤ 대우 : $a \leqq 1$ 그리고 $b \leqq 1$이면 $a+b \leqq 2$ (참)

12. 다음 중 ‘모든 평화고등학교 학생들은 평화시에 살고 있다.’의 부정인 명제를 고르면?

① 평화시에 살고 있지 않으면 평화고등학교 학생이 아니다.

② 평화시에 사는 학생은 평화고등학교 학생이다.

③ 모든 평화고등하교 학생들은 평화시에 살고 있지 않다.

④ 평화시에 살고 있지 않은 평화고등학교 학생이 적어도 한명은 있다.

⑤ 어떤 평화고등학교 학생들은 평화시에 살고 있다.

해설

모든 ~ 이다. : (부정) ⇒ 어떤 ~ 아니다.
적어도 ~ 아니다.

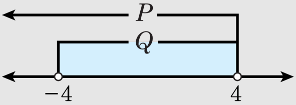
13. $x < 4$는 $-4 < x < 4$ 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답 : 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

$p : x < 4,\ q\ :\ -4 < x < 4$ 라고 하면



$\therefore Q \subset P$

14. $a > b > c > 0$일 때, $A = \dfrac{c}{b-a}$, $B = \dfrac{a}{b-c}$, $C = \dfrac{b}{a-c}$의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $A < B < C$ ② $A < C < B$ ③ $B < C < A$

④ $B < A < C$ ⑤ $C < A < B$

해설

$a > b > c > 0$에서

$b-a<0,\ b-c>0,\ a-c>0$이므로

$$A = \frac{c}{b-a} < 0,\ B = \frac{a}{b-c} > 0$$

$$C = \frac{b}{a-c} > 0$$

$$\begin{aligned} B - C &= \frac{a}{b-c} - \frac{b}{a-c} = \frac{a(a-c)-b(b-c)}{(b-c)(a-c)} \\ &= \frac{a^2-ac-b^2+bc}{(b-c)(a-c)} \\ &= \frac{(a-b)(a+b)-c(a-b)}{(b-c)(a-c)} \\ &= \frac{(a-b)(a+b-c)}{(b-c)(a-c)} > 0 \end{aligned}$$

$\therefore B > C$

따라서 $A < 0,\ B > C > 0$이므로

$B > C > A$이다.

15. a, b 가 실수일 때, 다음은 부등식 $|a|+|b| \geq |a+b|$ 을 증명한 것이다. 증명과정에 쓰이지 <u>않은</u> 성질을 고르면?

증명

$(|a|+|b|)^2-(|a+b|)^2$
$=|a|^2+|b|^2+2|a||b|-(a+b)^2$
$= \; a^2+b^2+2|ab|-a^2-2ab-b^2$
$= \; 2(|ab|-ab) \; 0$
$\therefore (|a|+|b|)^2 \geq (|a+b|)^2$
$\therefore |a|+|b| \geq |a+b|$

① $|a| \geq a$

② $a \geq b$, $b \geq c$ 이면 $a \geq c$

③ $|a|^2=a^2$

④ $a-b \geq 0$ 이면 $a \geq b$

⑤ $a \geq 0$, $b \geq 0$, $a^2 \geq b^2$ 이면 $a \geq b$

해설

$(|a|+|b|)^2-(|a+b|)^2$
$=|a|^2+|b|^2+2|a||b|-(a+b)^2$ (③이 쓰임)
$=a^2+b^2+2|ab|-a^2-2ab-b^2$
$=2(|ab|-ab) \geq 0$ (①이 쓰임)
$\therefore (|a|+|b|)^2 \geq (|a+b|)^2$ (④가 쓰임)
$\therefore |a|+|b| \geq |a+b|$ (⑤가 쓰임)
따라서, ②는 쓰이지 않았다.

16. x가 양의 실수 일 때, $x^2+1+\frac{1}{x^2}$의 최솟값과 그 때의 x값을 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 1

해설

$x^2>0,\ \frac{1}{x^2}>0$이므로

산술평균과 기하평균에 의하여

$$x^2+1+\frac{1}{x^2}\geq 2\sqrt{x^2\times\frac{1}{x^2}}+1\geq 2+1=3$$

등호는 $x^2=\frac{1}{x^2}$일 때 성립하므로 $x^4=1$

따라서 양의 실수 x는 1이다.

최솟값은 3이고, x값은 1이다.

17. 실수 x에 대한 두 조건

p : $\lvert x-2\rvert < a$ (단, $a > 0$)
q : $x < -3$ 또는 $x > 1$

에 대하여 명제 $p \rightarrow q$가 참이 되기 위한 a의 값의 범위를 $\alpha < a \le \beta$ 라 할 때, $\alpha + \beta$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

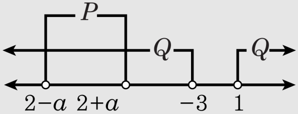
$\lvert x-2\rvert < a$ 에서 $-a < x-2 < a$ $\therefore$ $2-a < x < 2+a$ $\therefore$ $P = \{x \mid 2-a < x < 2+a\}$, $Q = \{x \mid x < -3$ 또는 $x > 1\}$

따라서 $P \subset Q$가 되려면 $2+a \le -3$ $\cdots$ ㉠ 또는 $2-a \ge 1$ $\cdots$ ㉡,

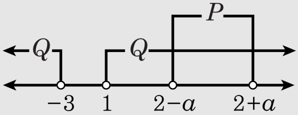
즉, $a \le -5$ 또는 $a \le 1$

그런데 $a > 0$이므로 구하는 a의 범위는 $0 < a \le 1$

㉠ :



㉡ :



$\therefore$ $\alpha = 0$, $\beta = 1$

$\therefore$ $\alpha + \beta = 1$

18. 양수 x 에 대하여 명제 '$ax^2 - a^2x + 2 \neq 0$ 이면 $x \neq 1$ 이다.' 가 참이기 위한 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

주어진 명제가 참이므로 대우도 참이다.
'$x = 1$ 이면 $ax^2 - a^2x + 2 = 0$ 이다.' 가 참이므로
$a - a^2 + 2 = 0,\ a^2 - a - 2 = 0$
$(a+1)(a-2) = 0$
$\therefore\ a = -1$ 또는 $a = 2$
$a > 0$ 이므로 $a = 2$

19. 실수 x, y에 대하여 $3x+4y=5$일 때, x^2+y^2의 최솟값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 6 ⑤ 8

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해

$(3^2+4^2)(x^2+y^2) \geq (3x+4y)^2$

$25(x^2+y^2) \geq 25$

$\therefore \; x^2+y^2 \geq 1$

해설

$3x+4y=5$에서

$$y=\frac{1}{4}(5-3x)$$

$$x^2+y^2=x^2+\frac{1}{16}(3x-5)^2$$

$$=x^2+\frac{1}{16}(9x^2-30x+25)$$

$$=\frac{25}{16}x^2-\frac{30}{16}x+\frac{25}{16}$$

$$=\frac{25}{16}\left(x^2-\frac{6}{5}x+\left(\frac{3}{5}\right)^2-\left(\frac{3}{5}\right)^2\right)+\frac{25}{16}$$

$$=\frac{25}{16}\left(x-\frac{3}{5}\right)^2-\frac{9}{16}+\frac{25}{16}$$

$$=\frac{25}{16}\left(x-\frac{3}{5}\right)^2+1$$

20. 두 실수 x, y의 제곱의 합이 10일 때, $x+3y$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 한다. 이 때, $M-m$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해

$(1^2+3^2)(x^2+y^2) \geq (x+3y)^2$

$x^2+y^2=10$이므로 $100 \geq (x+3y)^2$

$\therefore \ -10 \leq x+3y \leq 10$

$\therefore \ M=10, \ m=-10$

$\therefore \ M-m=10-(-10)=20$