

1. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 2(m + a - 1)x + m^2 + a^2 - 2b = 0$ 이 m 의 값에 관계없이 중근을 갖는다. $a + b$ 의 값은?

① $\frac{1}{2}$

② 1

③ $\frac{3}{2}$

④ 2

⑤ $\frac{5}{3}$

해설

중근을 가지므로, $\frac{D'}{4} = 0$ 을 만족한다.

$$\frac{D'}{4} = (m + a - 1)^2 - (m^2 + a^2 - 2b) = 0$$

$$m(2a - 2) + (1 - 2a + 2b) = 0$$

m 에 대한 항등식이므로

$$2a - 2 = 0, \quad 1 - 2a + 2b = 0$$

$$\therefore a = 1, \quad b = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a + b = \frac{3}{2}$$

2. 이차방정식 $x^2 + (m+1)x + m + 4 = 0$ 이 중근을 가질 때, 모든 실수 m 의 값의 합을 구하면?

① -3

② 0

③ 2

④ 3

⑤ 5

해설

중근을 가지므로, 판별식 $D = 0$

$$D = (m+1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m+4) = m^2 - 2m - 15 = 0$$

$$(m-5)(m+3) = 0 \quad \therefore m = -3, 5$$

$$\therefore m \text{의 값의 합은 } -3 + 5 = 2$$

3. 이차방정식 $x^2 + 2x + 2 - a = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 a 의 범위를 구하면?

① $a < 1$

② $a \geq 1$

③ $-1 < a < 1$

④ $a > 1$

⑤ $a \geq -1$

해설

$$x^2 + 2x + 2 - a = 0 \text{ 이}$$

서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는

판별식 $D > 0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = 1 - (2 - a) > 0$$

$$1 - 2 + a > 0$$

$$\therefore a > 1$$

4. 이차식 $ax^2 + 4x + 2a$ 가 x 에 대한 완전제곱식이 되도록 하는 실수 a 의 값은?

① ± 1

② $\pm \sqrt{2}$

③ ± 2

④ $\pm \sqrt{3}$

⑤ $\pm \sqrt{5}$

해설

주어진 식이 x 에 대한 완전제곱식이 되려면
판별식 $D = 0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = 2^2 - a \cdot 2a = 0$$

$$4 - 2a^2 = 0, a^2 = 2$$

$$\therefore a = \pm \sqrt{2}$$

5. x 에 대한 이차식 $a(1-x^2) - 2bx + c(1+x^2)$ 이 완전제곱식일 때, a, b, c 를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 어떤 삼각형인가?

- ① a 를 빗변으로 하는 직각삼각형
- ② b 를 빗변으로 하는 직각삼각형
- ③ c 를 빗변으로 하는 직각삼각형
- ④ 예각삼각형
- ⑤ 정삼각형

해설

$a(1-x^2) - 2bx + c(1+x^2)$ 을 x 에 대한 내림차순으로 정리하면
 $(c-a)x^2 - 2bx + a+c$

위의 식이 완전제곱식이 되려면

$c-a \neq 0$ 이고, $\frac{D}{4} = 0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = b^2 - (c-a)(c+a) = 0$$

$$b^2 - (c^2 - a^2) = 0, \quad b^2 - c^2 + a^2 = 0$$

$$\therefore c^2 = b^2 + a^2$$

따라서 c 를 빗변으로 하는 직각삼각형이다.

6. 다음 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖는 것을 모두 고르면?

$$\textcircled{\Gamma} x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\textcircled{\text{L}} x^2 + 2x + 4 = 0$$

$$\textcircled{\text{E}} x^2 + 4x + 2 = 0$$

① $\textcircled{\Gamma}$

② $\textcircled{\text{L}}$

③ $\textcircled{\text{E}}$

④ $\textcircled{\Gamma}, \textcircled{\text{E}}$

⑤ $\textcircled{\text{L}}, \textcircled{\text{E}}$

해설

$$\textcircled{\Gamma} (x+1)^2 = 0 : \text{중근}$$

$$\textcircled{\text{L}} a=1, b'=1, c=4$$

$$1^2 - 1 \cdot 4 = -3 < 0 : \text{허근}$$

$$\textcircled{\text{E}} a=1, b'=2, c=2$$

$$2^2 - 1 \cdot 2 = 2 > 0 : \text{서로 다른 두 실근 (O)}$$

7. 다음 설명 중 틀린 것을 고르면?

① $x^2 + 5x + 1 = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 가진다.

② $x^2 + 5 = 0$ 는 두 허근을 가진다.

③ $m = 0$ 또는 4일 때, $x^2 - mx + m = 0$ 은 중근을 가진다.

④ $k \geq 1$ 일 때 $x^2 - 2x + 2 - k = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 가진다

⑤ $x^2 - 6x + a = 0$ 은 $a = 9$ 일 때만 중근을 가진다.

해설

① $25 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 21 > 0$

② $0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -4 < 0$

③ $(-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot m = m(m - 4) = 0$

⑤ $9 - 1 \cdot a = 9 - a = 0, a = 9$

$\Rightarrow$ ④ $(-1)^2 - 1 \cdot (2 - k) = k - 1 > 0 \therefore k > 1$

8. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 에 대한 설명으로 다음 <보기> 중 옳은 것의 개수는? (단, a, b, c, p, q 는 실수, $i = \sqrt{-1}$)

보기

- ㉠ 판별식은 $b^2 - 4ac$ 이다.
- ㉡ 두 근의 합은 $\frac{b}{a}$ 이다.
- ㉢ $a < 0, c < 0$ 이면 허근만 갖는다.
- ㉣ $a > 0, c < 0$ 이면 서로 다른 두 실근을 갖는다.
- ㉤ 두 근의 곱은 $\frac{c}{a}$ 이다.
- ㉥ 한 근이 $p + qi$ 이면 다른 한 근은 $q - pi$ 이다.

① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 5개

해설

- ㉠ 실계수 방정식에서만 판별식을 사용할 수 있다. 현재 a, b, c 가 실수이므로 판별식 사용 가능(참)
- ㉡ 두근의 합은 $-\frac{b}{a}$ 이다. (거짓)
- ㉢ $b^2 - 4ac$ 에서 $ac > 0$ 이다.
하지만 $b^2 < 4ac$ 인 경우만 허근을 가짐(거짓)
- ㉣ 판별식 $b^2 - 4ac$ 에서 $ac < 0$ 이므로 $b^2 - 4ac > 0$ (참)
- ㉤ 두 근의 곱은 $\frac{c}{a}$ 이다. (참)
- ㉥ 실계수 방정식에서 한 근이 $p + qi$ 이면 $p - qi$ 가 또 다른 한 근이다.(거짓)

9. 이차방정식 $(a-b)x^2 + (b-c)x + (c-a) = 0$ 이 중근을 가질 조건을 구하면?(단, $a \neq b$)

① $a = b + c$

② $2a = b + c$

③ $a = b - c$

④ $2a = b - c$

⑤ $2a = 2b - c$

해설

$$\begin{aligned} D &= (b-c)^2 - 4(a-b)(c-a) \\ &= b^2 + c^2 - 2bc - 4(ac - a^2 - bc + ab) \\ &= 4a^2 + b^2 + c^2 - 4ac + 2bc - 4ab \\ &= (2a - b - c)^2 \end{aligned}$$

준식이 중근을 가져야 하므로

$D = 0$ 이어야 한다.

따라서, $(2a - b - c)^2 = 0$, $2a - b - c = 0$

$\therefore 2a = b + c$

10. x 에 대한 이차방정식 $(a+1)x^2 - 4x + 2 = 0$ 에 대하여 [보기]의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

- ㉠ $a = 1$ 일 때, 중근을 갖는다.
 ㉡ $a > 1$ 일 때, 서로 다른 두 허근을 갖는다.
 ㉢ $a < 1$ 일 때, 서로 다른 두 실근을 갖는다.

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉡, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$a \neq -1$ 일 때, 주어진 방정식은 이차방정식이다.

서로 다른 두 실근을 가질 때

$$\frac{D}{4} = 4 - 2(a+1) = 2 - 2a > 0$$

$$\therefore a < 1$$

따라서 $a < -1$ 또는 $-1 < a < 1$ 일 때,

서로 다른 두 실근을 갖는다.

중근을 가질 때

$$\frac{D}{4} = 2 - 2a = 0$$

$$\therefore a = 1$$

따라서, $a = 1$ 일 때, 중근을 갖는다.

서로 다른 두 허근을 가질 때

$$\frac{D}{4} = 2 - 2a < 0$$

$$\therefore a > 1$$

따라서 $a > 1$ 일 때 서로 다른 두 허근을 갖는다.