1. $\sqrt{-3} \times \sqrt{-6} - \sqrt{8} \div \sqrt{-4}$ 을 $a + bi$ (a, b 는 실수) 형태로 나타내면?

① $2\sqrt{2} + 3i$ ② $-3\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ ③ $-2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}i$
④ $2\sqrt{3}i$ ⑤ $3\sqrt{3}$

해설

$\sqrt{-3} \times \sqrt{-6} - \sqrt{8} \div \sqrt{-4}$

$= \sqrt{3}i \times \sqrt{6}i - \dfrac{2\sqrt{2}}{2i}$

$= -3\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

2. $\dfrac{1+i^3+i^6}{1+i^2+i^4}$ 의 값은?

① i ② $-i$ ③ $-\dfrac{i}{2}$ ④ $\dfrac{1-i}{2}$ ⑤ $\dfrac{1+i}{2}$

해설

$\dfrac{1+i^3+i^6}{1+i^2+i^4} = \dfrac{1+(-i)+(-1)}{1+(-1)+1} = \dfrac{-i}{1} = -i$

3. $z=1+i$ 일 때, $\dfrac{z\bar{z}}{z-\bar{z}}$ 의 값은?(단, $i=\sqrt{-1}$, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

① $1+i$ ② $1-i$ ③ 1 ④ i ⑤ $-i$

해설

$z=1+i$ 이면 $\bar{z}=1-i$ 이다.

$\therefore \dfrac{z\bar{z}}{z-\bar{z}}=\dfrac{(1+i)(1-i)}{(1+i)-(1-i)}=\dfrac{2}{2i}=-i$

4. 다음 중 옳은 것은?

① $\sqrt{-3}\times\sqrt{-4}=-\sqrt{12}$
② $\sqrt{-3}\times\sqrt{-4}=\sqrt{12}$
③ $\sqrt{-3}\times\sqrt{4}=-\sqrt{12}$
④ $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-4}}=-\sqrt{\dfrac{3}{4}}$
⑤ $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{4}}=-\sqrt{\dfrac{3}{4}}$

해설

② $\sqrt{-3}\times\sqrt{-4}=\sqrt{3}i\times\sqrt{4}i=-\sqrt{12}$
③ $\sqrt{-3}\times\sqrt{4}=\sqrt{3}i\times\sqrt{4}=\sqrt{12}i$
④ $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-4}}=\sqrt{\dfrac{3}{4}}$
⑤ $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{4}}=\sqrt{\dfrac{3}{4}}i$

5. 실수 k 에 대하여 복소수 $z = 2(k-i)-k(1+i)^2$ 의 값이 실수가 되도록 하는 k 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$z = 2(k-i)-k(1+i)^2$ 의 값이 실수가 되려면 허수 부분이 0 이어야 한다.

$z = 2(k-i)-k(1+i)^2$

$= 2k-2i-2ki$

$= 2k-(2+2k)i$

허수 부분이 0 이려면 $2+2k=0$ 이어야 한다.

따라서 $k=-1$

6. $(1+i)x^2+(1-i)x-6-2i$ 가 순허수가 되는 실수 x 의 값을 구하면?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 2 ⑤ 3

해설

주어진 식을 정리하면 $(x^2+x-6)+(x^2-x-2)i$ 이고
순허수가 되기 위해선 $x^2+x-6=(x+3)(x-2)=0$ 이어야
하므로 $x=-3$ 또는 $x=2$ 이다.
그런데 $x^2-x-2\neq 0$ 이어야 하므로 $x\neq 2$
따라서 $x=-3$

7. $z_1 = 1 - i, z_2 = 1 + i$ 일 때, $z_1^3 + z_2^3$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① $4 - 2i$ ② 0 ③ 20
④ $-2 + 4i$ ⑤ -4

해설

$z_1 + z_2 = 2,\ z_1 z_2 = 2$
$z_1^3 + z_2^3 = (z_1 + z_2)^3 - 3z_1 z_2(z_1 + z_2)$
$= 8 - 12$
$= -4$

8. $x = \sqrt{3} + 2i$, $y = \sqrt{3} - 2i$ 일 때, $x^2 + xy + y^2$ 의 값을 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 5 ② 7 ③ $2\sqrt{3} + 4i$
④ 12 ⑤ $12 + 2\sqrt{3}i$

해설

$x + y = 2\sqrt{3}$,
$xy = (\sqrt{3} + 2i)(\sqrt{3} - 2i) = 3 - 4i^2 = 7$ 이므로
$x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy = 12 - 7 = 5$ 이다.

9. 복소수 z의 켤레복소수 $\bar{z}$라 할 때 $(1+2i)z+3(2-\bar{z})=0$을 만족하는 복소수 z를 구하면?

① $z=2-3i$ ② $z=4-3i$ ③ $z=6-3i$
④ $z=2+3i$ ⑤ $z=4+3i$

해설

$z=a+bi, \bar{z}=a-bi$라 하면
$(\text{준식})=(1+2i)(a+bi)+3(2-a+bi)$
$=(6-2a-2b)+(2a+4b)i$
$\therefore 6-2a-2b=0, 2a+4b=0$
$\therefore a=6, b=-3$
$\therefore z=6-3i$

10. 등식 $(1+i)z+(2z-3i)i=0$ 을 만족하는 복소수 z 는?

① $3+9i$ ② $-3+9i$ ③ $3-9i$
④ $\frac{3}{10}-\frac{9}{10}i$ ⑤ $-\frac{3}{10}+\frac{9}{10}i$

해설

$z=a+bi$ ($a,\ b$ 는 실수) 로 놓으면
$(1+i)(a+bi)+\{2(a+bi)-3i\}i=0$
$(a+bi+ai-b)+(2ai-2b+3)=0$
$(a-3b+3)+(3a+b)i=0$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$a-3b+3=0$, $3a+b=0$
두 식을 연립하여 풀면
$a=-\frac{3}{10}$, $b=\frac{9}{10}$
$\therefore\ z=-\frac{3}{10}+\frac{9}{10}i$

11. 다음이 성립하도록 하는 실수 x 의 값의 범위는?

$$\sqrt{-x^2+5x-6}=-\sqrt{x-3}\sqrt{2-x}$$

① $x \geq 2$　② $x \leq 3$　③ $x \leq 2$
④ $x \geq 3$　⑤ $2 \leq x \leq 3$

해설
$\sqrt{-x^2+5x-6}=-\sqrt{(x-3)(2-x)}$
$=-\sqrt{x-3}\sqrt{2-x}$이려면
$(x-3)(2-x)$ 에서
㉠ $x-3 \leq 0$,　$x \leq 3$
㉡ $2-x \leq 0$,　$x \geq 2$
㉠, ㉡을 동시에 만족시켜야 하므로
$\therefore\ 2 \leq x \leq 3$

12. 복소수 $(1+i)x^2+2(2+i)x+3-3i$를 제곱하면 음의 실수가 된다. 이 때, 실수 x의 값은?
(단, $i^2=-1$)

① -1 ② 1 ③ -3 ④ 3 ⑤ 7

해설

$(x^2+4x+3)+(x^2+2x-3)i$가 순허수이어야 하므로
$x^2+4x+3=0,\ x^2+2x-3\neq 0$
$(x+3)(x+1)=0,\ x=-1,\ x=-3$
$(x+3)(x-1)\neq 0,\ x\neq 1,\ x\neq -3$
$\therefore\ x=-1$

13. $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{8n}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{8n}$ 의 값은? (단, n 은 자연수)

① -2 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

(준식) $=\left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^{4n}+\left\{\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^{4n}$

$=\left(\frac{1+2i+i^2}{2}\right)^{4n}+\left(\frac{1-2i+i^2}{2}\right)^{4n}$

$=i^{4n}+(-i)^{4n}=2\cdot i^{4n}$

$=2\cdot(i^4)^n=2\cdot 1^n=2$

14. $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\alpha^3+2\alpha^2+2\alpha+5$ 의 값을 구하면?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$2\alpha = -1+\sqrt{3}i$

$2\alpha+1 = \sqrt{3}i$

양변을 제곱하여 정리하면

$\alpha^2+\alpha+1=0$

$\alpha^3+2\alpha^2+2\alpha+5$

$=\alpha(\alpha^2+\alpha+1)+(\alpha^2+\alpha+1)+4$

$=4$

해설

$\alpha^2+\alpha+1=0$ 을 얻은 후 $\alpha^3+2\alpha^2+2\alpha+5$ 를 $\alpha^2+\alpha+1$ 로 나누면

$\alpha^3+2\alpha^2+2\alpha+5$

$=(\alpha^2+\alpha+1)(\alpha+1)+4$

$=4\ (\because\ \alpha^2+\alpha+1=0)$

15. 두 실수 a, b 에 대하여 $\sqrt{-32}-\sqrt{-8}\sqrt{-3}+\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{-3}}=a+bi$ 일 때, $\dfrac{1}{2}ab$ 의 값은?
(단, $i=\sqrt{-1}$)

① $-\sqrt{3}$　② $2\sqrt{3}$　③ $-3\sqrt{3}$
④ $4\sqrt{3}$　⑤ $-4\sqrt{3}$

해설

$\sqrt{-32}-\sqrt{-8}\sqrt{-3}+\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{-3}}$

$=4\sqrt{2}i+\sqrt{24}-\sqrt{8}i$

$=4\sqrt{2}i+2\sqrt{6}-2\sqrt{2}i$

$=2\sqrt{6}+2\sqrt{2}i$

$a=2\sqrt{6}, b=2\sqrt{2}$

$\therefore \dfrac{1}{2}ab=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{6}\times 2\sqrt{2}=4\sqrt{3}$

16. $i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{29} + i^{30}$ 을 계산하면?

① $i - 1$　② $1 - 2i$　③ $3i - 1$　④ $2 - 3i$　⑤ $i + 3$

해설

$i + i^2 + i^3 + i^4 = i - 1 - i + 1 = 0$

$i^{4k} = 1,\ i^{4k+1} = i,\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i$

$$\begin{aligned} \therefore i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{29} + i^{30} &= i^{29} + i^{30} \\ &= i + i^2 \\ &= i - 1 \end{aligned}$$

17. 복소수 $\alpha = 2 - i$, $\beta = -1 + 2i$ 일 때, $\alpha\overline{\alpha} + \overline{\alpha}\beta + \alpha\overline{\beta} + \beta\overline{\beta}$ 의 값은?
(단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ 는 각각 α, β 의 켤레복소수이고 $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 10 ⑤ 20

해설

$\alpha\overline{\alpha} + \overline{\alpha}\beta + \alpha\overline{\beta} + \beta\overline{\beta}$
$= \overline{\alpha}(\alpha + \beta) + \overline{\beta}(\alpha + \beta)$
$= (\alpha + \beta)(\overline{\alpha} + \overline{\beta})$
$= (\alpha + \beta)(\overline{\alpha + \beta})$
$= (1 + i)(1 - i)$
$= 2$

18. 복소수 z 와 그의 켤레복소수 $\bar{z}$ 에 대한 다음 설명 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $z+\bar{z}$ 는 실수이다. ② $z=\bar{z}$ 이면 z 는 실수이다.

③ $z\bar{z}=1$ 이면 $z^2=1$ 이다. ④ $z\bar{z}=0$ 이면 $z=0$ 이다.

⑤ $z\bar{z}$ 는 실수이다.

해설

복소수 z 와 그의 켤레복소수를 각각
$z=a+bi,\ \bar{z}=a-bi$ (a, b 는 실수)라 하면
① $z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$ (참)

② $z=\bar{z} \Leftrightarrow a+bi=a-bi$
$\Leftrightarrow 2bi=0$
$\Leftrightarrow b=0$(참)

③ $z\bar{z}=a^2+b^2=1 \Rightarrow z^2=a^2-b^2+2abi \neq 1$ (거짓)
(반례) $a=0,\ b=1$ 일 때, $z^2=-1$
④ $z\bar{z}=a^2+b^2=0 \Leftrightarrow a=0,\ b=0$ (참)
⑤ $z\bar{z}=a^2+b^2$ (참)

19. 복소수 z와 그 켤레복소수 $\bar{z}$에 대하여 다음을 만족하는 z를 구하면?

$$z+\bar{z}=4,\quad z\cdot\bar{z}=7$$

① $z=1\pm\sqrt{3}i$ ② $z=2\pm\sqrt{3}i$ ③ $z=3\pm\sqrt{3}i$
④ $z=1\pm2\sqrt{3}i$ ⑤ $z=2\pm2\sqrt{3}i$

해설

$z=a+bi$
$z+\bar{z}=2a=4, z\cdot\bar{z}=a^2+b^2=7$
$\therefore a=2, b=\pm\sqrt{3}$
$\therefore z=2\pm\sqrt{3}i$

20. 다음 <보기>에서 계산 중 잘못된 것을 모두 고르면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

보기

Ⅰ. $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{(-3)\cdot(-3)} = \sqrt{9} = 3$
Ⅱ. $\sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5\times(-2)} = \sqrt{-10} = \sqrt{10}i$
Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \sqrt{\dfrac{2}{-6}} = \sqrt{-\dfrac{1}{3}} = \sqrt{\dfrac{1}{3}}i$
Ⅳ. $\dfrac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{-10}{2}} = \sqrt{-5} = \sqrt{5}i$

① Ⅰ, Ⅱ　② Ⅰ, Ⅲ　③ Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ
④ Ⅱ, Ⅳ　⑤ Ⅲ, Ⅳ

해설

Ⅰ. $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{3}i\sqrt{3}i = \sqrt{9}i^2 = -3$
∴ 옳지 않다.
Ⅱ. $\sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5}\sqrt{2}i = \sqrt{10}i$
∴ 옳다.
Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}i} = \sqrt{\dfrac{2}{6}}\cdot\dfrac{i}{i^2} = -\sqrt{\dfrac{1}{3}}i$
∴ 옳지 않다.
Ⅳ. $\dfrac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{10}i}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{10}{2}}i = \sqrt{5}i$
∴ 옳다.