1. $\sqrt{-3} \times \sqrt{-6} - \sqrt{8} \div \sqrt{-4}$ 을 $a+bi$ (a, b 는 실수) 형태로 나타내면?

① $2\sqrt{2}+3i$　　② $-3\sqrt{2}+\sqrt{2}i$　　③ $-2\sqrt{3}+2\sqrt{2}i$

④ $2\sqrt{3}i$　　⑤ $3\sqrt{3}$

해설

$$\sqrt{-3} \times \sqrt{-6} - \sqrt{8} \div \sqrt{-4}$$

$$= \sqrt{3}i \times \sqrt{6}i - \frac{2\sqrt{2}}{2i}$$

$$= -3\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

2. $\dfrac{1+i^3+i^6}{1+i^2+i^4}$ 의 값은?

① i ② $-i$ ③ $-\dfrac{i}{2}$ ④ $\dfrac{1-i}{2}$ ⑤ $\dfrac{1+i}{2}$

해설

$$\frac{1+i^3+i^6}{1+i^2+i^4}=\frac{1+(-i)+(-1)}{1+(-1)+1}=\frac{-i}{1}=-i$$

3. $z = 1 + i$ 일 때, $\dfrac{z\bar{z}}{z - \bar{z}}$ 의 값은?(단, $i = \sqrt{-1}$, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

① $1 + i$ ② $1 - i$ ③ 1 ④ i ⑤ $-i$

해설

$z = 1 + i$이면 $\bar{z} = 1 - i$이다.

$$\therefore \quad \frac{z\bar{z}}{z - \bar{z}} = \frac{(1+i)(1-i)}{(1+i)-(1-i)} = \frac{2}{2i} = -i$$

4. 다음 중 옳은 것은?

① $\sqrt{-3} \times \sqrt{-4} = -\sqrt{12}$

② $\sqrt{-3} \times \sqrt{-4} = \sqrt{12}$

③ $\sqrt{-3} \times \sqrt{4} = -\sqrt{12}$

④ $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-4}} = -\sqrt{\dfrac{3}{4}}$

⑤ $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{4}} = -\sqrt{\dfrac{3}{4}}$

해설

② $\sqrt{-3} \times \sqrt{-4} = \sqrt{3}i \times \sqrt{4}i = -\sqrt{12}$

③ $\sqrt{-3} \times \sqrt{4} = \sqrt{3}i \times \sqrt{4} = \sqrt{12}i$

④ $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-4}} = \sqrt{\dfrac{3}{4}}$

⑤ $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\dfrac{3}{4}}i$

5. 실수 k 에 대하여 복소수 $z = 2(k-i)-k(1+i)^2$ 의 값이 실수가 되도록 하는 k 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$z = 2(k-i)-k(1+i)^2$ 의 값이 실수가 되려면 허수 부분이 0 이어야 한다.

$$\begin{aligned} z &= 2(k-i)-k(1+i)^2 \\ &= 2k-2i-2ki \\ &= 2k-(2+2k)i \end{aligned}$$

허수 부분이 0이려면 $2+2k=0$ 이어야 한다.

따라서 $k=-1$

6. $(1+i)x^2+(1-i)x-6-2i$ 가 순허수가 되는 실수 x 의 값을 구하면?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 2 ⑤ 3

해설

주어진 식을 정리하면 $(x^2+x-6)+(x^2-x-2)i$ 이고
순허수가 되기 위해선 $x^2+x-6=(x+3)(x-2)=0$ 이어야
하므로 $x=-3$ 또는 $x=2$ 이다.
그런데 $x^2-x-2 \neq 0$ 이어야 하므로 $x \neq 2$
따라서 $x=-3$

7. $z_1 = 1 - i, z_2 = 1 + i$ 일 때, $z_1^3 + z_2^3$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① $4 - 2i$ ② 0 ③ 20

④ $-2 + 4i$ ⑤ -4

해설

$z_1 + z_2 = 2,\ z_1 z_2 = 2$

$$\begin{aligned} z_1^3 + z_2^3 &= (z_1 + z_2)^3 - 3z_1 z_2 (z_1 + z_2) \\ &= 8 - 12 \\ &= -4 \end{aligned}$$

8. $x = \sqrt{3} + 2i$, $y = \sqrt{3} - 2i$ 일 때, $x^2 + xy + y^2$ 의 값을 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 5 ② 7 ③ $2\sqrt{3} + 4i$

④ 12 ⑤ $12 + 2\sqrt{3}i$

해설

$x + y = 2\sqrt{3}$,

$xy = (\sqrt{3} + 2i)(\sqrt{3} - 2i) = 3 - 4i^2 = 7$ 이므로

$x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy = 12 - 7 = 5$ 이다.

9. 복소수 z의 켤레복소수 $\bar{z}$라 할 때 $(1+2i)z+3(2-\bar{z})=0$을 만족하는 복소수 z를 구하면?

① $z=2-3i$　② $z=4-3i$　③ $z=6-3i$

④ $z=2+3i$　⑤ $z=4+3i$

해설

$z=a+bi, \bar{z}=a-bi$라 하면

$$(\text{준식}) = (1+2i)(a+bi)+3(2-a+bi)$$
$$= (6-2a-2b)+(2a+4b)i$$

$\therefore 6-2a-2b=0, 2a+4b=0$

$\therefore a=6, b=-3$

$\therefore z=6-3i$

10. 등식 $(1+i)z+(2z-3i)i=0$ 을 만족하는 복소수 z 는?

① $3+9i$　② $-3+9i$　③ $3-9i$

④ $\frac{3}{10}-\frac{9}{10}i$　⑤ $-\frac{3}{10}+\frac{9}{10}i$

해설

$z=a+bi$ $(a,\ b$ 는 실수$)$로 놓으면

$(1+i)(a+bi)+\{2(a+bi)-3i\}i=0$

$(a+bi+ai-b)+(2ai-2b+3)=0$

$(a-3b+3)+(3a+b)i=0$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a-3b+3=0$, $3a+b=0$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-\frac{3}{10}$, $b=\frac{9}{10}$

$\therefore\ z=-\frac{3}{10}+\frac{9}{10}i$

11. 다음이 성립하도록 하는 실수 x 의 값의 범위는?

$$\sqrt{-x^2+5x-6} = -\sqrt{x-3}\sqrt{2-x}$$

① $x \geq 2$　② $x \leq 3$　③ $x \leq 2$

④ $x \geq 3$　⑤ $2 \leq x \leq 3$

해설

$\sqrt{-x^2+5x-6} = -\sqrt{(x-3)(2-x)}$

$= -\sqrt{x-3}\sqrt{2-x}$이려면

$(x-3)(2-x)$ 에서

㉠ $x-3 \leq 0,\quad x \leq 3$

㉡ $2-x \leq 0,\quad x \geq 2$

㉠, ㉡을 동시에 만족시켜야 하므로

$\therefore\ 2 \leq x \leq 3$

12. 복소수 $(1+i)x^2+2(2+i)x+3-3i$를 제곱하면 음의 실수가 된다. 이 때, 실수 x의 값은?
(단, $i^2=-1$)

① -1 ② 1 ③ -3 ④ 3 ⑤ 7

해설

$(x^2+4x+3)+(x^2+2x-3)i$가 순허수이어야 하므로
$x^2+4x+3=0,\ x^2+2x-3\neq 0$
$(x+3)(x+1)=0,\ x=-1,\ x=-3$
$(x+3)(x-1)\neq 0,\ x\neq 1,\ x\neq -3$
$\therefore\ x=-1$

13. $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{8n}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{8n}$ 의 값은? (단, n 은 자연수)

① -2 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$$(\text{준식}) = \left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^{4n} + \left\{\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^{4n}$$

$$= \left(\frac{1+2i+i^2}{2}\right)^{4n} + \left(\frac{1-2i+i^2}{2}\right)^{4n}$$

$$= i^{4n} + (-i)^{4n} = 2\cdot i^{4n}$$

$$= 2\cdot(i^4)^n = 2\cdot 1^n = 2$$

14. $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\alpha^3+2\alpha^2+2\alpha+5$ 의 값을 구하면?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$2\alpha = -1+\sqrt{3}i$

$2\alpha+1 = \sqrt{3}i$

양변을 제곱하여 정리하면

$\alpha^2+\alpha+1=0$

$\alpha^3+2\alpha^2+2\alpha+5$

$=\alpha(\alpha^2+\alpha+1)+(\alpha^2+\alpha+1)+4$

$=4$

해설

$\alpha^2+\alpha+1=0$ 을 얻은 후 $\alpha^3+2\alpha^2+2\alpha+5$ 를 $\alpha^2+\alpha+1$ 로 나누면

$\alpha^3+2\alpha^2+2\alpha+5$

$=(\alpha^2+\alpha+1)(\alpha+1)+4$

$=4\ (\because\ \alpha^2+\alpha+1=0)$

15. 두 실수 a, b 에 대하여 $\sqrt{-32} - \sqrt{-8}\sqrt{-3} + \dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{-3}} = a + bi$ 일 때, $\dfrac{1}{2}ab$ 의 값은?
(단, $i = \sqrt{-1}$)

① $-\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $-3\sqrt{3}$
④ $4\sqrt{3}$ ⑤ $-4\sqrt{3}$

해설

$$\sqrt{-32} - \sqrt{-8}\sqrt{-3} + \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{-3}}$$
$$= 4\sqrt{2}i + \sqrt{24} - \sqrt{8}i$$
$$= 4\sqrt{2}i + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}i$$
$$= 2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}i$$
$$a = 2\sqrt{6}, b = 2\sqrt{2}$$
$$\therefore \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{6} \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{3}$$

16. $i+i^2+i^3+i^4+\dots+i^{29}+i^{30}$을 계산하면?

① $i-1$ ② $1-2i$ ③ $3i-1$ ④ $2-3i$ ⑤ $i+3$

해설

$i+i^2+i^3+i^4=i-1-i+1=0$

$i^{4k}=1,\ i^{4k+1}=i,\ i^{4k+2}=-1,\ i^{4k+3}=-i$

$$\begin{aligned}\therefore i+i^2+i^3+\cdots+i^{29}+i^{30}&=i^{29}+i^{30}\\&=i+i^2\\&=i-1\end{aligned}$$

17. 복소수 $\alpha = 2 - i$, $\beta = -1 + 2i$ 일 때, $\alpha\overline{\alpha} + \overline{\alpha}\beta + \alpha\overline{\beta} + \beta\overline{\beta}$ 의 값은? (단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ 는 각각 α, β 의 켤레복소수이고 $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 10 ⑤ 20

해설

$$\begin{aligned}
&\alpha\overline{\alpha} + \overline{\alpha}\beta + \alpha\overline{\beta} + \beta\overline{\beta} \\
&= \overline{\alpha}(\alpha + \beta) + \overline{\beta}(\alpha + \beta) \\
&= (\alpha + \beta)(\overline{\alpha} + \overline{\beta}) \\
&= (\alpha + \beta)(\overline{\alpha + \beta}) \\
&= (1 + i)(1 - i) \\
&= 2
\end{aligned}$$

18. 복소수 z 와 그의 켤레복소수 $\bar{z}$ 에 대한 다음 설명 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $z+\bar{z}$ 는 실수이다.　② $z=\bar{z}$ 이면 z 는 실수이다.

③ $z\bar{z}=1$ 이면 $z^2=1$ 이다.　④ $z\bar{z}=0$ 이면 $z=0$ 이다.

⑤ $z\bar{z}$ 는 실수이다.

해설

복소수 z 와 그의 켤레복소수를 각각

$z=a+bi,\ \bar{z}=a-bi$ $(a, b$ 는 실수$)$라 하면

① $z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$ (참)

② $z=\bar{z} \Leftrightarrow a+bi=a-bi$

$\Leftrightarrow 2bi=0$

$\Leftrightarrow b=0$(참)

③ $z\bar{z}=a^2+b^2=1 \Rightarrow z^2=a^2-b^2+2abi \neq 1$ (거짓)

(반례) $a=0,\ b=1$ 일 때, $z^2=-1$

④ $z\bar{z}=a^2+b^2=0 \Leftrightarrow a=0,\ b=0$ (참)

⑤ $z\bar{z}=a^2+b^2$ (참)

19. 복소수 z와 그 켤레복소수 $\bar{z}$에 대하여 다음을 만족하는 z 를 구하면?

$$z + \bar{z} = 4, \quad z \cdot \bar{z} = 7$$

① $z = 1 \pm \sqrt{3}i$　② $z = 2 \pm \sqrt{3}i$　③ $z = 3 \pm \sqrt{3}i$

④ $z = 1 \pm 2\sqrt{3}i$　⑤ $z = 2 \pm 2\sqrt{3}i$

해설

$z = a + bi$

$z + \bar{z} = 2a = 4, z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = 7$

$\therefore a = 2, b = \pm\sqrt{3}$

$\therefore z = 2 \pm \sqrt{3}i$

20. 다음 <보기>에서 계산 중 잘못된 것을 모두 고르면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

보기

Ⅰ. $\sqrt{-3}\sqrt{-3}=\sqrt{(-3)\cdot(-3)}=\sqrt{9}=3$

Ⅱ. $\sqrt{5}\sqrt{-2}=\sqrt{5\times(-2)}=\sqrt{-10}=\sqrt{10}i$

Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}}=\sqrt{\dfrac{2}{-6}}=\sqrt{-\dfrac{1}{3}}=\sqrt{\dfrac{1}{3}}i$

Ⅳ. $\dfrac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{-10}{2}}=\sqrt{-5}=\sqrt{5}i$

① Ⅰ, Ⅱ　　② Ⅰ, Ⅲ　　③ Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ

④ Ⅱ, Ⅳ　　⑤ Ⅲ, Ⅳ

해설

Ⅰ. $\sqrt{-3}\sqrt{-3}=\sqrt{3}i\sqrt{3}i=\sqrt{9}i^2=-3$

∴ 옳지 않다.

Ⅱ. $\sqrt{5}\sqrt{-2}=\sqrt{5}\sqrt{2}i=\sqrt{10}i$

∴ 옳다.

Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}i}=\sqrt{\dfrac{2}{6}}\cdot\dfrac{i}{i^2}=-\sqrt{\dfrac{1}{3}}i$

∴ 옳지 않다.

Ⅳ. $\dfrac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{10}i}{\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{10}{2}}i=\sqrt{5}i$

∴ 옳다.