

1. 좌표평면에서 $(-5, 0)$ 과 $(25, 0)$ 을 지름의 양 끝으로 하는 원이 있다. $(x, 15)$ 가 원 위의 점일 때, x 는?

① 10 ② 12.5 ③ 15 ④ 17.5 ⑤ 20

해설

두 점 $(-5, 0)$ 과 $(25, 0)$ 의 중점 $(10, 0)$ 이 중심이고

반지름은 15인 원이므로

$$(x - 10)^2 + y^2 = 225$$

$(x, 15)$ 가 이 방정식을 만족시키므로 대입하면,

$$(x - 10)^2 + 15^2 = 225 \quad \therefore x = 10$$

2. 두 원 $x^2 - 2x + y^2 + 3 = 0$ 과 $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 3 = 0$ 에 대하여 공통현의 방정식을 구하면?

① $2x - y - 3 = 0$

② $2x - 2y + 3 = 0$

③ $2x - 2y - 3 = 0$

④ $2x + 2y - 3 = 0$

⑤ $2x + 2y + 3 = 0$

해설

$$\begin{aligned}(x^2 - 2x + y^2 + 3) - (x^2 + y^2 + 2x - 4y - 3) &= 0 \\ -4x + 4y + 6 &= 0 \\ \therefore 2x - 2y - 3 &= 0\end{aligned}$$

3. 원 $x^2 + y^2 = 13$ 위의 점 $(2, 3)$ 에서의 접선의 방정식을 구하면?

① $2x + 3y + 13 = 0$

② $2x + 3y - 13 = 0$

③ $3x + 2y + 13 = 0$

④ $3x + 2y - 13 = 0$

⑤ $3x - 2y - 13 = 0$

해설

$(2, 3)$ 이 원 위의 점이므로

$$2 \cdot x + 3 \cdot y = 13$$

$$\therefore 2x + 3y - 13 = 0$$

4. 두 점 $A(0, 0)$, $B(0, 6)$ 에서의 거리의 비가 $2:1$ 인 점 P 가 그리는 도형의 넓이를 구하면?

① π ② 4π ③ 8π ④ 12π ⑤ 16π

해설

점 P 의 자취는 A, B 를 $2:1$ 로 내분하는 점과 외분하는 점을 지름의 양 끝으로 하는 원과 같다.

$$\Rightarrow \text{내분점은 } \left(0, \frac{2 \times 6}{2+1}\right) = (0, 4)$$

$$\Rightarrow \text{외분점은 } \left(0, \frac{2 \times 6}{2-1}\right) = (0, 12)$$

$\therefore$ 중심은 $(0, 8)$ 이고, 반지름이 4 인 원

$$\Rightarrow \text{넓이는 } \pi \cdot 4^2 = 16\pi$$

5. $A(-2, 1)$ 과 점 $B(2, -1)$ 을 각각 지나는 임의의 두 직선은 항상 서로 직교한다.
이 때, 만나는 점 P 의 자취의 길이를 구하면?

① $2\sqrt{5}$ ② $3\sqrt{5}\pi$ ③ $2\sqrt{5}\pi$ ④ $2\sqrt{3}\pi$ ⑤ $3\sqrt{5}$

해설

$\overline{PA} \perp \overline{PB}$ 이므로 교점 P 는 $\overline{AB}$ 를 지름으로 하는 원 위에 있다.
그러므로 점 P 의 자취의 길이는 $\overline{AB} \times \pi$ 이다.
 $\overline{AB} = 2\sqrt{5}$ 이므로 $2\sqrt{5}\pi$ 이다.

6. 원 $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ 은 x 축과 두 점에서 만난다. 이 두 점 사이의 거리는 얼마인가?

① $\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$$(x^2 + 4x + 4 - 4) + (y^2 - 2y + 1 - 1) + 1 = 0$$

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$$

x 축과 만나는 점은 y 의 좌표가 0 이므로

$$(x + 2)^2 + 1^2 = 4$$

$$\therefore x = -2 \pm \sqrt{3}$$

$$\text{두 점의 거리는 } -2 + \sqrt{3} - (-2 - \sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$$

7. 점 $(0, 4)$ 를 지나고 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 접하는 직선의 방정식은?

① $y = \pm \sqrt{11}x + 4$

② $y = \pm \sqrt{13}x + 4$

③ $y = \pm \sqrt{14}x + 4$

④ $y = \pm \sqrt{15}x + 4$

⑤ $y = \pm \sqrt{17}x + 4$

해설

접선의 기울기를 m 이라고 하면 점 $(0, 4)$ 를 지나는 접선의 방정식은 $y - 4 = mx$ 즉, $mx - y + 4 = 0$
원의 중심 $(0, 0)$ 로부터 이 직선까지의 거리가 반지름 1과 같아야 하므로

$$\frac{4}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1, 4 = \sqrt{m^2 + 1}$$

양변을 제곱하여 풀면 $m^2 = 15$

$$\therefore m = \pm \sqrt{15}$$

$$\text{따라서 } y = \pm \sqrt{15}x + 4$$

8. 직선 $3x + 4y + a = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2$ 에 접할 때, 양수 a 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 11$

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2^2$$

직선이 원에 접하므로 원의 중심

$(1, -1)$ 에서 직선까지의 거리가

원의 반지름의 길이 2 와 같다.

$$\text{따라서, } \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$$

$$|a - 1| = 10$$

$$a - 1 = \pm 10$$

$$a > 0 \text{ 이므로 } a = 11$$

9. 직선 $y = 2x + k$ 와 원 $x^2 - 4x + y^2 = 21$ 이 만나는 두 교점 사이의 거리가 최대일 때, 상수 k 의 값은?

① -1

② -4

③ 4

④ 10

⑤ -10

해설

주어진 원은 $(x - 2)^2 + y^2 = 25$ 이므로

중심의 좌표는 $(2, 0)$ 이다. 두 교점 사이의 거리의

최댓값은 직선 $y = 2x + k$ 가 원의 중심 $(2, 0)$ 을 지날 때이므로

$k = -4$

10. 원 $x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0$ 위의 점 P에서 직선 $3x - 4y - 24 = 0$ 까지의 거리의 최솟값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y - 4)^2 = 5^2$ 이므로
원의 중심의 좌표는 (0, 4) 이고, 반지름의 길이는 5이다.

그런데 중심 (0, 4) 에서 직선 $3x - 4y - 24 = 0$

까지의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot 4 - 24|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{40}{5} = 8$$

따라서 구하는 최소 거리는

$$d - (\text{원의 반지름의 길이}) = 8 - 5 = 3$$