1. 좌표평면에서 $(-5,\ 0)$과 $(25,\ 0)$을 지름의 양 끝으로 하는 원이 있다. $(x,\ 15)$가 원 위의 점일 때, x는?

① 10　② 12.5　③ 15　④ 17.5　⑤ 20

해설

두 점 $(-5,0)$과 $(25,0)$의 중점 $(10,0)$이 중심이고
반지름은 15인 원이므로
$(x-10)^2+y^2=225$
$(x,15)$가 이 방정식을 만족시키므로 대입하면,
$(x-10)^2+15^2=225 \quad \therefore\ x=10$

2. 두 원 $x^2-2x+y^2+3=0$과 $x^2+y^2+2x-4y-3=0$에 대하여 공통현의 방정식을 구하면?

① $2x-y-3=0$

② $2x-2y+3=0$

③ $2x-2y-3=0$

④ $2x+2y-3=0$

⑤ $2x+2y+3=0$

해설

$(x^2-2x+y^2+3)-(x^2+y^2+2x-4y-3)=0$

$-4x+4y+6=0$

$\therefore\ 2x-2y-3=0$

3. 원 $x^2+y^2=13$ 위의 점 $(2,\ 3)$ 에서의 접선의 방정식을 구하면?

① $2x+3y+13=0$

② $2x+3y-13=0$

③ $3x+2y+13=0$

④ $3x+2y-13=0$

⑤ $3x-2y-13=0$

해설

$(2,\ 3)$이 원 위의 점이므로

$2\cdot x+3\cdot y=13$

$\therefore 2x+3y-13=0$

4. 두 정점 $A(0,\ 0)$, $B(0,\ 6)$ 에서의 거리의 비가 $2:1$ 인 점 P 가 그리는 도형의 넓이를 구하면?

① π ② 4π ③ 8π ④ 12π ⑤ 16π

해설

점 P 의 자취는 A, B 를 $2:1$ 로 내분하는 점과 외분하는 점을 지름의 양 끝으로 하는 원과 같다.

$\Rightarrow$ 내분점은 $\left(0,\ \dfrac{2\times6}{2+1}\right)=(0,\ 4)$

$\Rightarrow$ 외분점은 $\left(0,\ \dfrac{2\times6}{2-1}\right)=(0,\ 12)$

$\therefore$ 중심은 $(0,\ 8)$ 이고, 반지름이 4 인 원

$\Rightarrow$ 넓이는 $\pi\cdot4^2=16\pi$

5. A$(-2,1)$과 점 B$(2,-1)$을 각각 지나는 임의의 두 직선은 항상 서로 직교한다.
이 때, 만나는 점 P의 자취의 길이를 구하면?

① $2\sqrt{5}$ ② $3\sqrt{5}\pi$ ③ $2\sqrt{5}\pi$ ④ $2\sqrt{3}\pi$ ⑤ $3\sqrt{5}$

해설

$\overline{\mathrm{PA}} \perp \overline{\mathrm{PB}}$ 이므로 교점 P는 $\overline{\mathrm{AB}}$ 를 지름으로 하는 원 위에 있다.
그러므로 점 P의 자취의 길이는 $\overline{\mathrm{AB}} \times \pi$이다.
$\overline{\mathrm{AB}} = 2\sqrt{5}$ 이므로 $2\sqrt{5}\pi$이다.

6. 원 $x^2+y^2+4x-2y+1=0$ 은 x 축과 두 점에서 만난다. 이 두 점 사이의 거리는 얼마인가?

① $\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$(x^2+4x+4-4)+(y^2-2y+1-1)+1=0$
$(x+2)^2+(y-1)^2=4$
x 축과 만나는 점은 y 의 좌표가 0 이므로
$(x+2)^2+1^2=4$
$\therefore\ x=-2\pm\sqrt{3}$
두 점의 거리는 $-2+\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})=2\sqrt{3}$

7. 점 $(0,\ 4)$를 지나고 원 $x^2+y^2=1$에 접하는 직선의 방정식은?

① $y=\pm\sqrt{11}x+4$

② $y=\pm\sqrt{13}x+4$

③ $y=\pm\sqrt{14}x+4$

④ $y=\pm\sqrt{15}x+4$

⑤ $y=\pm\sqrt{17}x+4$

해설

접선의 기울기를 m이라고 하면 점 $(0,4)$를 지나는 접선의 방정식은 $y-4=mx$ 즉, $mx-y+4=0$

원의 중심 $(0,0)$로부터 이 직선까지의 거리가 반지름 1과 같아야 하므로

$$\frac{4}{\sqrt{m^2+1}}=1,4=\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하여 풀면 $m^2=15$

$\therefore m=\pm\sqrt{15}$

따라서 $y=\pm\sqrt{15}x+4$

8. 직선 $3x+4y+a=0$ 이 원 $x^2+y^2-2x+2y=2$ 에 접할 때, 양수 a 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=11$

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면
$(x-1)^2+(y+1)^2=2^2$
직선이 원에 접하므로 원의 중심
$(1,\ -1)$ 에서 직선까지의 거리가
원의 반지름의 길이2 와 같다.

따라서, $\dfrac{|3\cdot 1+4\cdot(-1)+a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$

$|a-1|=10$

$a-1=\pm 10$

$a>0$ 이므로 $a=11$

9. 직선 $y = 2x + k$와 원 $x^2 - 4x + y^2 = 21$이 만나는 두 교점 사이의 거리가 최대일 때, 상수 k의 값은?

① -1 ② -4 ③ 4 ④ 10 ⑤ -10

해설

주어진 원은 $(x-2)^2 + y^2 = 25$이므로
중심의 좌표는 $(2, 0)$이다. 두 교점 사이의 거리의
최댓값은 직선 $y = 2x + k$가 원의 중심 $(2, 0)$을 지날 때이므로
$k = -4$

10. 원 $x^2+y^2-8y-9=0$ 위의 점 P에서 직선 $3x-4y-24=0$ 까지의 거리의 최솟값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$x^2+y^2-8y-9=0 \Leftrightarrow x^2+(y-4)^2=5^2$ 이므로
원의 중심의 좌표는 $(0,\ 4)$이고, 반지름의 길이는 5이다.
그런데 중심 $(0,\ 4)$ 에서 직선 $3x-4y-24=0$
까지의 거리를 d 라 하면

$$d=\frac{|3\cdot 0-4\cdot 4-24|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{40}{5}=8$$

따라서 구하는 최소 거리는
$d-$ (원의 반지름의 길이)$=8-5=3$