**1.** $y = x^2 + (m+1)x + 2m - 1$ 이 $x$ 축과 접하도록 $m$ 의 값을 구하고, 그 때의 접점을 순서대로 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $m = 5,\ 1$ , 접점 : $(-1,\ 0)$ , $(-3,\ 0)$

해설

$y = x^2 + (m+1)x + 2m - 1$ 이 $x$ 축과 접하려면
중근을 가져야 하므로
$D = (m+1)^2 - 4(2m-1) = 0$
$m^2 - 6m + 5 = 0$
$\therefore\ (m-5)(m-1) = 0$
$\therefore\ m = 5,\ 1$
( i ) $m = 1$ 일 때, $y = x^2 + 2x + 1$ 에서 $x = -1$
$\therefore$ 접점$(-1,\ 0)$
( ii ) $m = 5$ 일 때, $y = x^2 + 6x + 9$ 에서 $x = -3$
$\therefore$ 접점$(-3,\ 0)$

**2.** 직선 $y = mx - 2$와 포물선 $y = 2x^2 - 3x$가 있다.

(1) 직선이 포물선에 접하도록 $m$의 값을 정하여라.
(2) 직선이 포물선과 두 점에서 만나도록 $m$의 값의 범위를 정하여라.
(3) 직선이 포물선과 만나지 않도록 $m$의 값의 범위를 정하여라

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $1, \ -7$

▷ 정답 : $m > 1, \ m < -7$

▷ 정답 : $-7 < m < 1$

해설

직선과 포물선의 교점의 $x$좌표를 구하는 식은
$mx - 2 = 2x^2 - 3x$
곧, $2x^2 - (m+3)x + 2 = 0$이고,
$D = (m+3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = m^2 + 6m - 7$
$\quad = (m-1)(m+7)$
(1) $D = (m-1)(m+7) = 0$
$\quad \therefore \ m = 1, \ -7$
(2) $D = (m-1)(m+7) > 0$
$\quad \therefore \ m > 1, \ m < -7$
(3) $D = (m-1)(m+7) < 0$
$\quad \therefore \ -7 < m < 1$

**3.** 이차함수 $y=x^2-4px+5-p$의 그래프가 다음 조건을 만족시키도록 $p$의 값 또는 $p$의 값의 범위를 정하여라.

(1) $x$축과 두 점에서 만날 때
(2) $x$축과 접할 때
(3) $x$축과 만나지 않을 때

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $p<-\frac{5}{4}$ 또는 $p>1$

▷ 정답 : $p=-\frac{5}{4}$ 또는 $p=1$

▷ 정답 : $-\frac{5}{4}<p<1$

해설

$y=x^2-4px+5-p$에서

$\frac{D}{4}=4p^2-(5-p)=4p^2+p-5=(4p+5)(p-1)$

(1) $\frac{D}{4}=(4p+5)(p-1)>0$이므로

$p>1$ 또는 $p<-\frac{5}{4}$

(2) $\frac{D}{4}=(4p+5)(p-1)=0$이므로

$p=1$ 또는 $p=-\frac{5}{4}$

(3) $\frac{D}{4}=(4p+5)(p-1)<0$이므로

$-\frac{5}{4}<p<1$

**4.** 이차함수 $y = x^2 - kx + 3k + 2$의 그래프에 의하여 잘려지는 $x$축의 길이가 3일 때, 모든 실수 $k$의 값의 합은?

① 6　② 8　③ 10　④ 12　⑤ 14

해설

이차함수 $y = x^2 - kx + 3x + 2$ 의 그래프와 $x$ 축과의 교점의 좌표를 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$ 이라 하면
$\alpha,\ \beta$ 는 이차방정식 $x^2 - kx + 3k + 2 = 0$ 이 두 근이다.
근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = k,\ \alpha\beta = 3k + 2$
잘려지는 $x$ 축의 길이가 3이므로 $|\alpha - \beta| = 3$
이 때, $|\alpha - \beta|^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$이므로 $9 = k^2 - 4(3k + 2)$
$k^2 - 12k - 17 = 0$
따라서 근과 계수의 관계에 의하여 모든 $k$의 값의 합은 12이다.

**5.** 이차함수 $y = x^2 - kx + 4$ 의 그래프와 $x$축이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 $k$의 값 또는 $k$의 값의 범위를 구하면?

① $k < -4$ 또는 $k > 4$
② $k < -2$ 또는 $k > 2$
③ $k < -1$ 또는 $k > 1$
④ $k < -\frac{2}{3}$ 또는 $k > \frac{2}{3}$
⑤ $k < -\frac{1}{4}$ 또는 $k > \frac{1}{4}$

해설

이차방정식 $x^2 - kx + 4 = 0$ 에서 $D = (-k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = k^2 - 16$
$D = K^2 - 16 > 0$ 이어야 하므로 $(k+4)(k-4) > 0$
$\therefore k < -4$ 또는 $k > 4$

**6.** 부등식 $ax^2+bx+c \geq 0$의 해가 $-3 \leq x \leq 2$이고 $f(x)=ax^2+bx+c$일 때, 함수 $y=f(3x-2)$의 그래프가 $x$축과 만나는 두 점 사이의 거리는?

① 1 ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{3}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

**해설**

부등식 $ax^2+bx+c \geq 0$의 해가 $-3 \leq x \leq 2$일 때 $a<0$이고,

$$ax^2+bx+c \geq 0 \Leftrightarrow a(x+3)(x-2) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow ax^2+ax-6a \geq 0$$

$\therefore\ b=a,\ c=-6a$

따라서, $f(x)=ax^2+ax-6a$이므로

$f(x)=0$ 의 두 근은 $-3,\ 2$이다.

즉, $f(-3)=0$ 또는 $f(2)=0$이다.

한편, 함수 $y=f(3x-2)$의 그래프와 $x$ 축과의 교점의 $x$좌표는 방정식 $f(3x-2)=0$의 실근과 같으므로

$f(3x-2)=0$의 두 근은

$3x-2=-3$ 또는 $3x-2=2$에서

$x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=\frac{4}{3}$

따라서, 구하는 두 점 사이의 거리는

$$\frac{4}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{3}$$

**7.** 이차함수 $y = x^2 + 2x + k$의 그래프가 $x$축과 만나는 두 점 사이의 거리가 $4\sqrt{2}$일 때, 상수 $k$의 값은?

① $-8$ ② $-7$ ③ $-6$ ④ $-5$ ⑤ $-4$

해설

이차함수 $y = x^2 + 2x + k$의 그래프가 $x$축과 만나는 두 점의 $x$좌표를 각각 $\alpha$, $\beta$ $(\alpha < \beta)$라고 하면 $\alpha$, $\beta$는 이차방정식 $x^2 + 2x + k = 0$의 두 실근이다.
이 때, 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = -2$, $\alpha\beta = k$이고
$x$축 위의 두 교점 사이의 거리가 $4\sqrt{2}$ 이므로 $\beta - \alpha = 4\sqrt{2}$

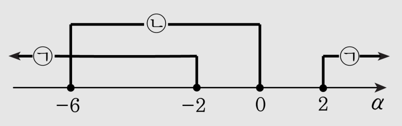
$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$에서 $\left(4\sqrt{2}\right)^2 = (-2)^2 - 4k$, $32 = 4 - 4k$
$\therefore k = -7$

**8.** 두 이차함수의 그래프 $y=x^2-2ax+4$, $y=2x^2-2ax+a^2+3a$가 모두 $x$축과 교점을 갖도록 상수 $a$의 값의 범위를 정하면?

① $-9 \le a \le -5$ ② $-6 \le a \le -2$ ③ $-3 \le a \le 0$
④ $2 \le a \le 5$ ⑤ $3 \le a \le 7$

해설

이차함수 $y=x^2-2ax+4$의 그래프가 $x$ 축과 교점을 가지려면
$x^2-2ax+4=0$에서
$\frac{D_1}{4}=a^2-1\cdot 4 \ge 0$, $a^2-4 \ge 0$, $(a+2)(a-2) \ge 0$
$\therefore a \le -2$ 또는 $a \ge 2$ ⋯⋯ ㉠
또, 이차함수 $y=2x^2-2ax+a^2+3a$의 그래프가 $x$ 축과 교점을 가지려면
$2x^2-2ax+(a^2+3a)=0$에서
$\frac{D_2}{4}=a^2-2(a^2+3a) \ge 0$, $a^2+6a \le 0$, $a(a+6) \le 0$
$\therefore -6 \le a \le 0$ ⋯⋯ ㉡
이 때, ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.




(1) 두 그래프 모두 $x$축과 교점을 갖도록 하는 $a$의 값의 범위는 위의 수직선에게 ㉠과 ㉡의 공통 부분이므로 $-6 \le a \le -2$

**9.** 이차함수 $y = x^2 - 2(k-1)x + 9$의 그래프가 $x$축과 만나지 않기 위한 정수 $k$의 개수는?

① 4개 ② 5개 ③ 6개 ④ 7개 ⑤ 8개

해설

이차함수 $y = x^2 - 2(k-1)x + 9$의 그래프가 $x$축과 만나지 않으려면
이차방정식 $y = x^2 - 2(k-1)x + 9 = 0$의 판별식을 $D$라 할 때 $D < 0$이어야 한다.

$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - 9 < 0$

$k^2 - 2k - 8 < 0$, $(k+2)(k-4) < 0$

$\therefore -2 < k < 4$

따라서, $k$값 중 정수인 것은 $-1$, $0$, $1$, $2$, $3$의 5개이다.

**10.** 다음 식은 평면 위에 있는 어떤 그래프의 방정식이다. 이 그래프가 $x$ 축에 접하도록 실수 $a$, $b$ 의 값에 대해 $a+b$ 의 값을 구하면?

$$y+(x+y)x+(a-1)x-b^2=0$$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

접점의 $x$ 좌표는 $y=0$ 일 때, 얻어지는 방정식
$x^2+(a-1)x-b^2=0$ 의 중근이다.
$\therefore\ D=(a-1)^2+4b^2=0$
$a$, $b$ 는 실수이므로 $a=1$ , $b=0$
$\therefore\ a+b=1$

**11.** 두 포물선 $y = x^2 - 2ax + 4$, $y = x^2 - 2(a-1)x + 2a^2 - 6a + 4$ 중 하나만이 $x$ 축과 만날 때, 상수 $a$의 값의 범위를 구하면?

① $a \le -5$ 또는 $-3 \le a < -1$ 또는 $a > 0$

② $a \le -4$ 또는 $-1 \le a < 1$ 또는 $a > 2$

③ $a \le -2$ 또는 $1 \le a < 2$ 또는 $a > 3$

④ $a \le 0$ 또는 $2 \le a < 3$ 또는 $a > 5$

⑤ $a \le 1$ 또는 $3 \le a < 4$ 또는 $a > 9$

해설

이차방정식 $x^2 - 2ax + 4 = 0$, $x^2 - 2(a-1)x + 2a^2 - 6a + 4 = 0$의 판별식을 각각 $D_1$, $D_2$라 하자. $y = x^2 - 2ax + 4$의 그래프가 $x$축과 만날 조건은 $\frac{D_1}{4} = a^2 - 4 \ge 0$

$\therefore a \le -2$ 또는 $a \ge 2$ $\cdots\cdots$ ㉠

$y = x^2 - 2(a-1)x + 2a^2 - 6a + 4$의 그래프가 $x$축과 만날 조건은

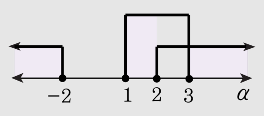
$\frac{D_2}{4} = (a-1)^2 - 2a^2 + 6a - 4 \ge 0$

$-a^2 + 4a - 3 \ge 0$, $a^2 - 4a + 3 \le 0$

$(a-1)(a-3) \le 0$

$\therefore 1 \le a \le 3$ $\cdots\cdots$ ㉡

두 개의 포물선 중 하나만이 $x$축과 만나려면 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내어 ㉠, ㉡중 하나만을 만족하는 $a$의 값의 범위를 구하면 된다.




따라서, 구하는 $a$의 값의 범위는 $a \le -2$ 또는 $1 \le a < 2$ 또는 $a > 3$

**12.** 이차함수 $y = x^2 - 2ax + a^2 - 1$ 의 그래프가 $a$ 의 값에 관계없이 직선 $y = mx + n$ 과 접할 때, 상수 $m,\ n$ 에 대하여 $m + n$ 의 값은?

① $-4$　　② $-3$　　③ $-2$　　④ $-1$　　⑤ $0$

**해설**

이차함수 $y = x^2 - 2ax + a^2 - 1$ 의 그래프와
직선 $y = mx + n$ 이 접하므로
$x^2 - 2ax + a^2 - 1 = mx + n$
즉 $x^2 - (2a + m)x + a^2 - 1 - n = 0$ 에서
$D = (2a + m)^2 - 4(a^2 - 1 - n) = 0$
$\therefore\ 4ma + (m^2 + 4 + 4n) = 0$
이 식이 $a$ 의 값에 관계없이 성립하므로
$4m = 0$ , $m^2 + 4 + 4n = 0$
두 식을 연립하여 풀면 $m = 0,\ n = -1$
$\therefore\ m + n = -1$

**13.** 이차함수 $y = x^2 - kx + 4$ 의 그래프가 $x$ 축과 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 상수 $k$ 의 값의 범위를 구하면?

① $k < -2,\ k > 2$ ② $k < -4,\ k > 4$ ③ $k < -1,\ k > 1$
④ $k < 0,\ k > 4$ ⑤ $k < 0,\ k > 2$

해설

판별식 $D$ 가 $D > 0$ 이어야 하므로
$D = k^2 - 4 \cdot 4 > 0$
$(k - 4)(k + 4) > 0$
$\therefore\ k < -4,\ k > 4$

**14.** 이차함수 $y = x^2 + ax + b$가 두 직선 $y = -2x + 1$, $y = 4x - 2$에 동시에 접할 때, 상수 $a, b$의 합은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$y = x^2 + ax + b \cdots$ ㉠
$y = -2x + 1 \quad \cdots$ ㉡
$y = 4x - 2 \quad \cdots$ ㉢

㉠과 ㉡이 접하므로 $x^2 + ax + b = -2x + 1$
즉, $x^2 + (a + 2)x + b - 1 = 0$ 에서
$D = (a + 2)^2 - 4(b - 1) = 0$
$\therefore a^2 + 4a - 4b + 8 = 0 \cdots$ ㉣
㉠과 ㉢이 접하므로 $x^2 + ax + b = 4x - 2$
즉, $x^2 + (a - 4)x + b + 2 = 0$ 에서
$D = (a - 4)^2 - 4(b + 2) = 0$
$\therefore a^2 - 8a - 4b + 8 = 0 \cdots$ ㉤
㉣과 ㉤을 연립하여 풀면 $a = 0, b = 2$
$\therefore a + b = 2$

**15.** 직선 $y = ax + 1$ 이 두 이차함수 $y = x^2 + x + 2$ , $y = -x^2 + 4x$ 의 그래프와 모두 만나지 않도록 상수 $a$ 의 값의 범위를 정하면 $\alpha < a < \beta$ 이다. 이 때, $\alpha + \beta$ 의 값을 구하면?

① $-5$ ② $-3$ ③ $0$ ④ $3$ ⑤ $5$

**해설**

직선과 이차함수를 연립하여 판별식이
0 보다 작으면 직선과 이차함수가 만나지 않는다.

| | |
|---|---|
| 1) $ax + 1 = x^2 + x + 2$ | 2) $ax + 1 = -x^2 + 4x$ |
| $\Rightarrow x^2 + (1 - a)x + 1 = 0$ | $\Rightarrow x^2 + (a - 4)x + 1 = 0$ |
| $D = (a - 1)^2 - 4 < 0$ | $\Rightarrow D = (a - 4)^2 - 4 < 0$ |
| $\Rightarrow -1 < a < 3$ | $\Rightarrow 2 < a < 6$ |

$\therefore$ 1), 2) 의 공통 해 : $2 < a < 3$
$\therefore \alpha + \beta = 5$

**16.** 이차함수 $y = x^2 + ax + 3$의 그래프와 직선 $y = x + 3a$가 만나지 않도록 하는 실수 $a$의 값의 범위는?

① $-12 < a < 1$　② $-12 < a < 2$　③ $-11 < a < 1$

④ $-11 < a < 2$　⑤ $-10 < a < 2$

**해설**

이차함수 $y = x^2 + ax + 3$의 그래프와
직선 $y = x + 3a$는 서로 만나지 않으므로
이차방정식 $x^2 + ax + 3 = x + 3a$,
즉 $x^2 + (a-1)x + 3 - 3a = 0$에서
$D = (a-1)^2 - 4(3-3a) < 0$
$a^2 + 10a - 11 < 0,\ (a+11)(a-1) < 0$
$\therefore\ -11 < a < 1$

**17.** 함수 $y=-x^2+kx$의 그래프가 직선 $y=-x+4$에 접할 때, 양수 $k$의 값은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

$y=-x^2+kx$가 $y=-x+4$에 접하려면
$4-x=-x^2+kx \Rightarrow x^2-(k+1)x+4=0$의 판별식은 $D=0$이어야 한다.
$D=(k+1)^2-16=0 \Rightarrow k+1=\pm 4$
$\therefore k=3\ (\because k>0)$

**18.** 직선 $y=ax+1$이 이차함수 $y=x^2-3x+5$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나고, 이차함수 $y=x^2+3x+5$의 그래프와는 만나지 않을 때, 상수 $a$의 값의 범위를 구하면?

① $a<-7$ 또는 $a>1$ ② $-1<a<7$

③ $a<7$ ④ $-7<a<1$

⑤ $1<a<7$

해설

$ax+1=x^2-3x+5$에서 $x^2-(a+3)x+4=0$

(판별식)$=(a+3)^2-4\cdot1\cdot4>0$

$a<-7$ 또는 $a>1 \cdots$ ㉠

$ax+1=x^2+3x+5$에서 $x^2-(a-3)x+4=0$

(판별식)$=(a-3)^2-4\cdot1\cdot4<0$

$\therefore -1<a<7 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 상수 $a$의 값의 범위는 $1<a<7$

**19.** 점 $(0,\ -2)$ 를 지나고 이차함수 $y = x^2 - 2x + 2$ 에 접하는 직선의 방정식을 구하면?

① $y = x - 1$ 또는 $y = -x - 2$

② $y = x - 2$ 또는 $y = -3x - 1$

③ $y = 2x - 2$ 또는 $y = -6x - 2$

④ $y = 3x - 3$ 또는 $y = x + 1$

⑤ $y = 4x - 4$ 또는 $y = 5x + 3$

해설

점 $(0,\ -2)$ 를 지나는 직선의 방정식을 $y = mx - 2$ 라 하고
이 식과 이차함수 $y = x^2 - 2x + 2$ 를 연립하면
$x^2 - 2x + 2 = mx - 2$, $x^2 - (m+2)x + 4 = 0$
이 이차방정식이 중근을 가지므로 판별식 $D = 0$ 이다.
$D = (m+2)^2 - 4 \cdot 4 = 0$
$m^2 + 4m - 12 = 0$ $(m+6)(m-2) = 0$
$\therefore m = 2$ 또는 $m = -6$
따라서, 구하는 직선의 방정식은
$y = 2x - 2$ 또는 $y = -6x - 2$

**20.** 다음과 같은 포물선과 직선이 있다.

| |
|---|
| $y = x^2 + (m-1)x + m^2 + 1$ , $y = x + 1$ |

포물선이 직선보다 항상 위쪽에 존재하도록 $m$의 범위를 정하면?

① $m < -2,\ \ m > \frac{2}{3}$　　② $m < -1,\ \ m > \frac{2}{3}$
③ $m < -2,\ \ m > 2$　　④ $m < 2,\ \ m > \frac{2}{3}$
⑤ $m < -5,\ \ m > \frac{2}{3}$

해설

$x^2 + (m-1)x + m^2 + 1 > x + 1$을 항상 만족하도록 $m$을 정하면 된다.
$x^2 + (m-2)x + m^2 > 0$에서
판별식 $D = (m-2)^2 - 4m^2 < 0$, $(m-2+2m)(m-2-2m) < 0$
$(3m-2)(m+2) > 0$
$\therefore\ \ m < -2$ , $m > \frac{2}{3}$

(참고) $y = x^2 + (m-1)x + m^2 + 1$ ⋯⋯ ㉠
$y = x + 1$ ⋯⋯ ㉡
㉡의 그래프는 그 위치가 고정되어 있지만 ㉠의 그래프는 $m$의 값이 변함에 따라 그 위치가 변한다.
이를테면 $m = 0$, $m = 1$일 경우에 대해서 생각해 보자.
( i ) $m = 0$ 일 경우 ㉠은 $y = x^2 - x + 1$이므로
이 때에는 ㉠의 그래프가 ㉡의 그래프보다 위에 있는 $x$의 범위는 부등식 $x^2 - x + 1 > x + 1$을 만족하는 $x$의 범위와 같다.
( ii ) $m = 1$ 일 경우 ㉠은 $y = x^2 + 2$이므로
이 때에는 ㉠의 그래프가 ㉡의 그래프보다 항상 위에 있으므로 ㉠이 ㉡보다 항상 위에 있는 $x$의 범위는 $x$의 모든 실수값이다.
이 문제의 경우는 ( ii ) 같이 되도록 $m$의 범위를 정하라는 것이다.
㉠의 그래프가 ㉡의 그래프보다 항상 위쪽에 있으려면
$x^2 + (m-1)x + m^2 + 1 > x + 1$
곧, $x^2 + (m-2)x + m^2 > 0$이 $x$의 모든 실수값에 대하여 항상 성립하면 된다.
이 결과는 ㉠, ㉡의 그래프가 만나지 않도록 $m$의 범위를 정한 것과 같다.
그러나 일반적으로 직선과 포물선이 만나지 않는 경우에는 직선이 포물선보다 항상 위쪽에 있는 경우도 있으므로
'포물선이 직선보다 위쪽에 있다' 는 것과 '포물선과 직선이 만나지 않는다' 는 것과는 그 뜻이 다르다.

**21.** 이차함수 $y = ax^2 + bx$의 그래프가 점 $(-1, 4)$를 지나고 직선 $y = 2x - 2$와 접할 때, 상수 $a, b$의 합 $a + b$의 값은? (단, $ab < 0$ )

① $-2$ ② $-1$ ③ $0$ ④ $1$ ⑤ $2$

해설

이차함수 $y = ax^2 + bx$의 그래프가
점 $(-1, 4)$를 지나므로
$4 = a - b \cdots$ ㉠
또, 직선 $y = 2x - 2$와 접하므로
이차방정식 $ax^2 + (b-2)x + 2 = 0$에서
$D = (b-2)^2 - 8a = 0$
$\therefore\ b^2 - 4b + 4 - 8a = 0 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\begin{cases} a = 18 \\ b = 14 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \end{cases}$

이때, $ab < 0$을 만족시키는
$a, b$의 값은 $a = 2,\ b = -2$
$\therefore\ a + b = 0$

**22.** 직선 $y = x + 4$에 평행하고, 곡선 $y = -x^2 + 2$에 접하는 직선의 방정식은?

① $4x + 4y = 9$ ② $4x - 4y = 9$ ③ $-4x + 4y = 9$

④ $-4x - 4y = 5$ ⑤ $-4x - 4y = -5$

해설

직선 $y = x + 4$에 평행한 직선의 방정식을 $y = x + k$라 하면
이차방정식 $x + k = -x^2 + 2$,
즉 $x^2 + x + k - 2 = 0$의 판별식을 $D$라 할 때,
$D = 1 - 4k + 8 = 0$
$\therefore k = \frac{9}{4}$
따라서, 구하는 직선의 방정식은 $y = x + \frac{9}{4}$
$\therefore -4x + 4y = 9$

**23.** 이차함수 $y = x^2 + ax + a$의 그래프와 직선 $y = x + 1$이 한 점에서 만나도록 하는 $a$의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y = x^2 + ax + a \cdots$ ㉠

$y = x + 1 \qquad \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $y$를 소거하여 정리하면

$x^2 + ax + a = x + 1$

$\therefore\ x^2 + (a-1)x + a - 1 = 0$

㉠, ㉡가 한 점에서 만나면 이차방정식이 중근을 가지므로, 판별식을 $D$라 하면

$D = (a-1)^2 - 4(a-1) = 0$

$\therefore\ (a-1)\{(a-1) - 4\} = 0$

$\therefore\ (a-1)(a-5) = 0 \quad \therefore a = 1$ 또는 $5$

따라서 구하는 $a$의 값은 6

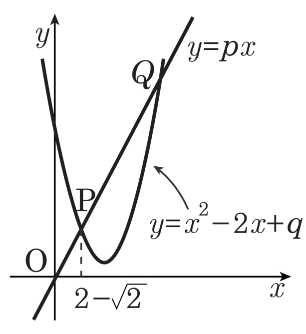
**24.** 이차함수 $y = -x^2 + kx + k$ 의 그래프와 직선 $y = -2x + 1$ 이 만나지 않도록 하는 $k$ 값의 범위를 구하면?

① $-8 < k < -1$　② $-8 < k < 0$　③ $-6 < k < 1$
④ $-6 < k < 2$　⑤ $-6 < k < 2$

해설

두 함수가 만나지 않으려면
두 식을 연립하였을 때 판별식이
0보다 작아야 한다.
$\Rightarrow \quad -2x + 1 = -x^2 + kx + k$
$\Rightarrow \quad x^2 - (k+2)x + 1 - k = 0$
$D = (k+2)^2 - 4(1-k) < 0$
$k^2 + 8k < 0$
$\Rightarrow \quad -8 < k < 0$

**25.** 다음 그림과 같이 직선 $y = px$ 와 이차함수$y = x^2 - 2x + q$ 의 그래프가 두 점 P, Q 에서 만나고 점 P 의 $x$ 좌표가 $2 - \sqrt{2}$ 이다. 이때, 유리수 $p$, $q$ 의 곱 $pq$ 의 값은?

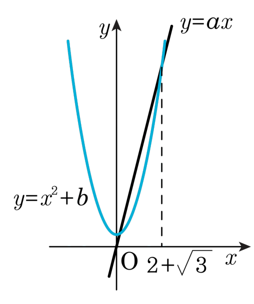



① 1 ② 4 ③ 6 ④ 9 ⑤ 12

해설

두 점 P, Q 의 $x$ 좌표는
이차방정식 $x^2 - 2x + q = px$ 의 두 실근이다.
$x^2 - (p+2)x + q = 0$ 에서 $p$, $q$ 는 유리수이므로
한 근이 $2 - \sqrt{2}$ 이면 다른 한 근은 $2 + \sqrt{2}$ 이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여
$(2 - \sqrt{2}) + (2 + \sqrt{2}) = p + 2$
$\therefore\ p = 2$
$(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2}) = q$
$\therefore\ q = 2$
$\therefore\ pq = 4$

**26.** 다음 그림과 같이 이차함수 $y = x^2 + b$ 의 그래프와 직선 $y = ax$ 가 서로 두 점에서 만나고, 한 교점의 $x$ 좌표가 $2 + \sqrt{3}$ 일 때, $a + b$ 의 값은?(단, $a$, $b$ 는 유리수)




① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^2 + b = ax$,
즉 $x^2 - ax + b = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 이다.
이때, $a$, $b$ 는 모두 유리수이므로
방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 이면
다른 한 근은 $2 - \sqrt{3}$ 이다.
따라서 근과 계수와의 관계에 의하여
$a = (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4$,
$b = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$
$\therefore\ a + b = 5$

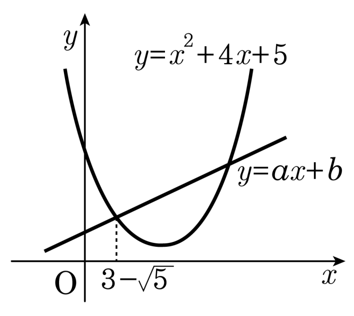
**27.** 두 개의 곡선 $y = ax^2 + bx + 8$ , $y = 2x^2 - 3x + 2$ 의 두 교점을 연결하는 직선이 $y = -x + 6$ 일 때, 상수 $a$, $b$ 의 값을 구하면?

① $a = -1,\ b = -1$
② $a = -1,\ b = 0$
③ $a = 1,\ b = 0$
④ $a = 1,\ b = -1$
⑤ $a = 0,\ b = 1$

해설

$y = ax^2 + bx + 8 \quad \cdots$ ①
$y = 2x^2 - 3x + 2 \quad \cdots$ ②
$y = -x + 6 \quad \cdots$ ③
두 교점을 ①, ②, ③이 모두 지나므로
②, ③의 교점을 ①이 지난다고 생각해도 좋다.
②, ③을 연립하여 풀면
교점은 $(2,\ 4)$, $(-1,\ 7)$ 이고,
이 두 점을 곡선 ①이 지나므로
$4a + 2b + 8 = 4$, $a - b + 8 = 7$
$\therefore\ a = -1,\ b = 0$

**28.** 다음 그림과 같이 포물선 $y = x^2 - 4x + 5$ 와 직선 $y = ax + b$ 의 두 교점 중 한 교점의 $x$ 좌표가 $3 - \sqrt{5}$ 일 때, 유리수 $a,\ b$ 의 합 $a + b$ 의 값은?

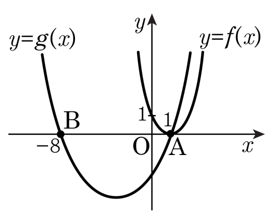



① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

연립방정식 $y = x^2 - 4x + 5$ , $y = ax + b$ 에서
$y$ 를 소거하면 $x^2 - 4x + 5 = ax + b$
$x^2 - (4 + a)x + 5 - b = 0 \cdots$ ㉠
이 때, 계수가 유리수인 방정식 ㉠의 한 근이
$3 - \sqrt{5}$ 이므로 $3 + \sqrt{5}$ 도 근이 된다.
$\therefore\ (3 - \sqrt{5}) + (3 + \sqrt{5}) = 4 + a$
$(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5}) = 5 - b$
$\therefore\ a = 2,\ b = 1$
$\therefore a + b = 3$

**29.** 다음 그림과 같이 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 $x$축과 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$에서 접하고, 이차함수 $y = g(x)$의 그래프는 $x$축과 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}(-8,\ 0)$에서 만난다. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 $x^2$의 계수가 모두 1일 때, 방정식 $f(x) + 2g(x) = 0$의 근은?




① $x = 1$　　② $x = -\dfrac{1}{3}$ 또는 $x = 1$

③ $x = -\dfrac{1}{5}$ 또는 $x = 3$　　④ $x = -\dfrac{1}{5}$ 또는 $x = 1$

⑤ $x = -5$ 또는 $x = 1$

해설

$f(x) = (x-1)^2$, $g(x) = (x+8)(x-1)$이므로

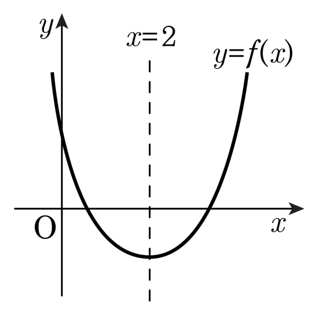
$f(x) + 2g(x) = (x-1)^2 + 2(x+8)(x-1) = 3x^2 + 12x - 15$

따라서, 방정식 $f(x) + 2g(x) = 0$,

즉 $3x^2 + 12x - 15 = 0$ 의 근은 $3(x+5)(x-1) = 0$

$\therefore x = -5$ 또는 $x = 1$

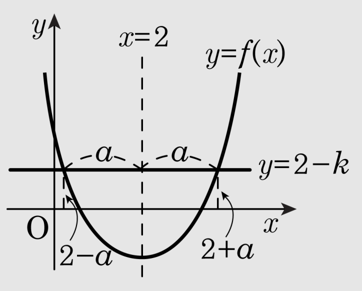
**30.** 이차함수 $y = f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같을 때, $x$에 대한 방정식 $(f \circ f)(x) = 0$의 모든 실근의 합은? (단, $y = f(x)$의 그래프는 $x$축의 양의 방향과 서로 다른 두 점에서 만난다.)




① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

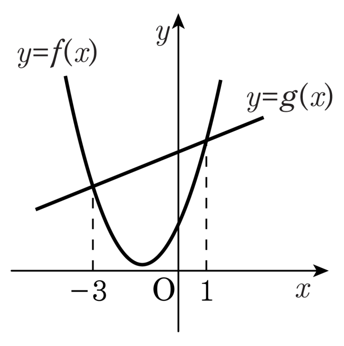
해설

$f(f(x)) = 0$에서 $f(x) = t$로 놓으면
$f(t) = 0$을 만족시키는 두 실근은
$t = 2 - k$ 또는 $f = 2 + k$
$(0 < k < 2)$로 놓을 수 있다.
$\therefore f(x) = 2 - k$ 또는 $f(x) = 2 + k$




( i ) $f(x) = 2 - k$를 만족시키는 $x$의 값은
$y = f(x)$ 의 그래프와
직선 $y = 2 - k$의 교점의 $x$좌표이므로
$x = 2 - \alpha$ 또는 $x = 2 + \alpha$
( ii ) $f(x) = 2 + k$를 만족시키는 $x$의 값도
마찬가지로 생각하면 $x = 2 - \beta$ 또는 $x = 2 + \beta$
따라서 $f(f(x)) = 0$을 만족시키는 모든 실근의 합은
$(2 - \alpha) + (2 + \alpha) + (2 - \beta) + (2 + \beta) = 8$

**31.** 아래 그림과 같이 두 함수 $f(x) = 2x^2 + ax + 4$ , $g(x) = cx + d$ 의 그래프가 $x = 1$ 과 $x = -3$ 에서 만난다. 이 때, 함수 $y = f(x) - g(x)$ 의 최솟값은?




① −8　　② −6　　③ −4　　④ 2　　⑤ 4

해설

두 함수를 연립하면,

$2x^2 + ax + 4 = cx + d$

$\Rightarrow 2x^2 + (a-c)x + 4 - d = 0 \cdots$ ㉠

근이 $-3, 1$ 이므로

$2(x+3)(x-1) = 0$ 과 일치한다.

㉠과 비교하면 $a - c = 4, d = 10$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) - g(x) &= 2x^2 + (a-c)x + 4 - d \\ &= 2x^2 + 4x - 6 \\ &= 2(x+1)^2 - 8 \end{aligned}$$

$\therefore$ 최솟값 : $-8$

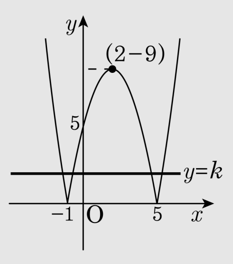
**32.** $x$에 대한 방정식 $|x^2-4x-5|=k$가 양의 근 두 개와 음의 근 두 개를 갖도록 하는 실수 $k$의 값의 범위는?

① $0<k<3$ ② $0<k<5$ ③ $3<k<5$
④ $1<k<4$ ⑤ $-2<k<5$

해설

방정식 $|x^2-4x-5|=k$의 실근의 개수는 함수 $y=|x^2-4x-5|$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$y=|x^2-4x-5|=|(x+1)(x-5)|=|(x-2)^2-9|$




따라서 주어진 방정식이 양의 근 두 개와 음의 근 두 개를 갖도록 하는 실수 $k$의 값의 범위는 $0<k<5$

**33.** 함수 $f(x) = \frac{x^2}{4} + a(x \geq 0)$ 의 역함수 $g(x)$ 에 대하여 방정식 $f(x) = g(x)$ 가 서로 다른 두 양의 실근을 가질 때, 실수 $a$ 의 값의 범위는?

① $0 \leq a < 1$　　② $a \geq 0$　　③ $a < 1$

④ $0 < a < 1$　　⑤ $a < 2$

**해설**

$f(x) = \frac{x^2}{4} + a(x \geq 0)$ 와 그 역함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 교점은 직선 $y = x$ 위에 있다.

따라서, 방정식 $\frac{x^2}{4} + a = x$,

즉 $x^2 - 4x + 4a = 0$ 이 서로 다른 두 양의 실근을 갖는다.

$x^2 - 4x + 4a = 0$ 의 두 근을 $\alpha$, $\beta$ 라 하면

$\alpha + \beta = 4 > 0$ ······㉠

$\alpha\beta = 4a > 0,\ a > 0$ ······㉡

$\frac{D}{4} = 4 - 4a > 0,\ a < 1$ ······㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $0 < a < 1$

**34.** 이차함수 $y=2x^2-3x+1$의 그래프와 직선 $y=ax+b$의 두 교점의 $x$좌표가 각각 1, 5일 때, 상수 $a$, $b$의 곱 $ab$의 값은?

① $-81$　② $-45$　③ 0　④ 5　⑤ 14

**해설**

이차방정식 $2x^2-3x+1=ax+b$, 즉 $2x^2-(3+a)x+1-b=0$의 두 근이 1, 5이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$1+5=\frac{3+a}{2}$, $1\times5=\frac{1-b}{2}$

$\therefore a=9$, $b=-9$

$\therefore ab=-81$

**35.** 두 함수 $f(x)=|x^2-2x-3|-1$과 $g(x)=2x-1$에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$f(x)=g(x)$에서 $|x^2-2x-3|-1=2x-1$

$|x^2-2x-3|=2x$

방정식 $|x^2-2x-3|=2x$의 실근의 개수는 함수 $y=|x^2-2x-3|$의 그래프와 직선 $y=2x$의 교점의 개수와 같다.

$y=|x^2-2x-3|=|(x+1)(x-3)|=|(x-1)^2-4|$

따라서 다음 그림에서 교점이 2개이므로 구하는 실근의 개수는 2개이다.