

1. 이차함수 $y = 2x^2 + kx - k$ 의 그래프가 x 축과 만나도록 하는 상수 k 의 값이 아닌 것은?

① -8

② -1

③ 0

④ 5

⑤ 8

해설

이차방정식 $2x^2 + kx - k = 0$ 에서 $D = k^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-k) \geq 0$ 이어야 하므로

$$k^2 + 8k \geq 0, \quad k(k + 8) \geq 0$$

$$\therefore k \leq -8 \text{ 또는 } k \geq 0$$

따라서 위의 k 의 값의 범위에 속하지 않는 것은 ②이다.

2. 이차함수 $y = x^2 - 2(k-3)x + 4$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수 k 의 값의 범위는?

① $k < 1$

② $1 < k < 3$

③ $k < 3$

④ $3 < k < 5$

⑤ $k < 1$ 또는 $k > 5$

해설

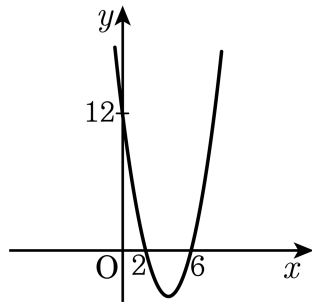
이차함수 $y = x^2 - 2(k-3)x + 4$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2 - 2(k-3)x + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D > 0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = (k-3)^2 - 4 > 0$$

$$k^2 - 6k + 5 > 0, (k-1)(k-5) > 0$$

$$\therefore k < 1 \text{ 또는 } k > 5$$

3. 다음은 이차함수 $y = (x - 2)(x - 6)$ 의 그래프이다.



이 이차함수가 x 축과 만나는 두 점을 각각 A, B라 할 때, $\overline{AB}$ 의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

이차방정식 $(x - 2)(x - 6) = 0$ 에서 $x = 2$ 또는 $x = 6$
따라서 A (2, 0), B (6, 0) 이므로 $\overline{AB} = 4$

4. 포물선 $y = -x^2 + kx$ 와 직선 $y = x + 1$ 이 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 k 의 범위는?

- ① $k > 2, k < -1$ ② $k > 3, k < -1$ ③ $k > 1, k < -1$
④ $k > 3, k < -2$ ⑤ $k > 3, k < -3$

해설

포물선과 직선이 다른 두 점에서 만나므로
 $-x^2 + kx = x + 1, x^2 + (1 - k)x + 1 = 0$ 에서
 $D = (1 - k)^2 - 4 > 0$
 $k^2 - 2k - 3 = (k - 3)(k + 1) > 0$
 $\therefore k > 3$ 또는 $k < -1$

5. 이차함수 $y = x^2 - 8x + a$ 의 그래프와 x 축과의 교점의 x 좌표가 6, b 일 때, $a + b$ 의 값은?

① 11

② 12

③ 13

④ 14

⑤ 15

해설

이차함수 $y = x^2 - 8x + a$ 의 그래프와

x 축과의 교점의 x 좌표는

이차방정식 $x^2 - 8x + a = 0$ 의 실근이다.

$x^2 - 8x + a = 0$ 에 $x = 6$ 을 대입하면

$36 - 48 + a = 0$ 에서 $a = 12$

따라서 $x^2 - 8x + 12 = 0$ 에서 $(x - 2)(x - 6) = 0$

$x = 2$ 또는 $x = 6$

$\therefore b = 2 \therefore a + b = 14$

6. 이차함수 $y = x^2 + (k - 3)x + k$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않을 때, 실수 k 의 값의 범위는?

① $-1 < k < 7$

② $-1 < k < 8$

③ $0 < k < 9$

④ $1 < k < 9$

⑤ $1 < k < 10$

해설

주어진 이차함수의 그래프가
 x 축과 만나지 않으려면
이차방정식 $x^2 + (k - 3)x + k = 0$ 이
실근을 갖지 않아야 하므로
 $D = (k - 3)^2 - 4k < 0$
 $k^2 - 10k + 9 < 0, (k - 1)(k - 9) < 0$
 $\therefore 1 < k < 9$

7. 직선 $y = 3x + 2$ 와 포물선 $y = x^2 + mx + 3$ 이 두 점에서 만나기 위한 실수 m 의 범위를 구하면?

- ① $m < -1, m > 3$ ② $m < 1, m > 5$ ③ $-1 < m < 3$
④ $-1 < m < 5$ ⑤ $1 < m < 5$

해설

$y = 3x + 2, y = x^2 + mx + 3$ 에서 y 를 소거하면
 $x^2 + (m - 3)x + 1 = 0, D = (m - 3)^2 - 4 > 0$
 $m^2 - 6m + 5 > 0, (m - 1)(m - 5) > 0$
 $\therefore m < 1, m > 5$

8. 이차함수 $y = x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6$ 의 그래프가 x 축에 접할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, a, b 는 실수)

① 2

② 5

③ 8

④ 10

⑤ 13

해설

$x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6 = 0$ 에서

$$\frac{D}{4} = a^2 - (-2b^2 - 4a + 4b - 6) = 0$$

$$\therefore (a+2)^2 + 2(b-1)^2 = 0$$

이 때, a, b 가 실수이므로 $a+2=0, b-1=0$

따라서 $a=-2, b=1$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 5$$

9. 포물선 $y = x^2 - 2kx + 2k + 3$ 과 x 축과의 두 교점 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$ 일 때, 모든 k 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

포물선 $y = x^2 - 2kx + 2k + 3$ 과 x 축과의 교점의 x 좌표는 이차방정식 $x^2 - 2kx + 2k + 3 = 0$ 의 두 근이므로 두 근을 α, β 라 하면 이차방정식의 두 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = 2k, \alpha\beta = 2k + 3$
 $|\alpha - \beta| = 2\sqrt{5}$ 에서 $|\alpha - \beta|^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$ 이므로
 $20 = (2k)^2 - 4(2k + 3), 4k^2 - 8k - 12 = 20$

$$k^2 - 2k - 8 = 0$$

따라서, 근과 계수의 관계에 의하여 모든 k 의 값의 합은 2이다.

10. 이차함수 $y = x^2 - ax + 1$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $a < -1$ 또는 $a > 1$

② $a < -2$ 또는 $a > 2$

③ $1 < a < -1$

④ $-2 < a < 2$

⑤ $a = -1$ 또는 $a = 1$

해설

이차함수 $y = x^2 - ax + 1$ 의 그래프가
 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로
이차방정식 $x^2 - ax + 1 = 0$ 에서
판별식의 값은 양이다.
즉 $D = a^2 - 4 > 0$
 $\therefore a < -2$ 또는 $a > 2$

11. 이차함수 $y = x^2 - 8x + k$ 의 그래프가 x 축과 서로 두 점에서 만날 때, 자연수 k 의 개수는?

① 4 개 ② 8 개 ③ 10 개 ④ 13 개 ⑤ 15 개

해설

그래프가 x 축과 두 점에서 만나려면

$x^2 - 8x + k = 0$ 의 판별식이 0 보다 커야한다.

$$\Rightarrow D' = 4^2 - k > 0$$

$$\Rightarrow k < 16$$

$\therefore$ 자연수 k 의 개수 : 15 개

12. 포물선 $y = x^2 - 2x + 4k$ 의 그래프가 x 축과 서로 만나지 않을 때의 k 의 범위를 구하면?

① $k < \frac{1}{2}$

② $k < -\frac{1}{2}$

③ $k > \frac{1}{4}$

④ $k < \frac{1}{4}$

⑤ $k > -\frac{1}{4}$

해설

$y = x^2 - 2x + 4k$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않으려면 판별식 D 가

$D < 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = 1 - 4k < 0$$

$$\therefore k > \frac{1}{4}$$

13. 이차함수 $y = x^2 + ax + 2a$ 의 그래프는 x 축과 두 점 A, B 에서 만나고 $\overline{AB} = 2$ 일 때, 모든 실수 a 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

A(α , 0), B(β , 0) ($\alpha < \beta$) 이라 하면
 α, β 는 이차방정식 $x^2 + ax + 2a = 0$ 의 두 근이므로 근과 계수의
관계에 의하여
 $\alpha + \beta = -a, \alpha\beta = 2a \quad \cdots \textcircled{1}$
이 때, $\overline{AB} = 2$ 이므로
 $\beta - \alpha = 2$ 양변을 제곱하면
 $(\beta - \alpha)^2 = 4$
 $(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 4 \quad \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하여 정리하면 $a^2 - 8a - 4 = 0$
따라서 모든 실수 a 의 값의 합은 8 이다

14. 다음 중 이차함수 $y = x^2 - 2(a + b)x + ab$ 의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것은? (단, a, b 는 실수)
- ① 항상 x 축과 만난다.
 - ② 항상 x 축과 만나지 않는다.
 - ③ a, b 가 양의 실수일 때, x 축과 두 점에서 만난다.
 - ④ a, b 가 음의 실수일 때, x 축과 접한다.
 - ⑤ a, b 가 음이 아닌 실수일 때, x 축과 만나지 않는다.

해설

이차함수 $y = x^2 - 2(a + b)x + ab$ 의 그래프와 x 축과의 교점의 개수는 이차방정식 $x^2 - 2(a + b)x + ab = 0$ 의 실근의 개수와 같다.
이차방정식 $x^2 - 2(a + b)x + ab = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
$$\frac{D}{4} = (a + b)^2 - ab = a^2 + ab + b^2$$
$$= \left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0$$
 이므로 임의의 실수 a, b 에 대하여 항상 실근을 갖는다.
따라서, 이차함수 $y = x^2 - 2(a + b)x + ab$ 의 그래프는 항상 x 축과 만난다.

15. 이차함수 $y = kx^2 + 4\sqrt{2}x + k + 2$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 정수 k 의 값들의 합은?

① -3 ② -5 ③ 7 ④ 3 ⑤ 5

해설

이차방정식 $kx^2 + 4\sqrt{2}x + k + 2 = 0$ 이

서로 다른 두 실근을 가지므로

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (2\sqrt{2})^2 - k(k+2) > 0$$

$$8 - k^2 - 2k > 0, (k+4)(k-2) < 0$$

$$\therefore -4 < k < 2$$

따라서 정수 k 는 $-3, -2, -1, 0, 1$ 이다.

$$\therefore (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 = -5$$

16. 이차함수 $y = x^2 + 2kx + 1$ 의 그래프는 x 축과 만나고, 이차함수 $y = -x^2 + kx + 2k$ 의 그래프는 x 축과 만나지 않는다. 이때, 정수 k 의 개수는?

① 5개 ② 6개 ③ 7개 ④ 8개 ⑤ 9개

해설

이차함수 $y = x^2 + 2kx + 1$ 의 그래프는 x 축과 만나므로
 $x^2 + 2kx + 1 = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 할 때,
 $\frac{D_1}{4} = k^2 - 1 \geq 0, (k+1)(k-1) \geq 0$
 $\therefore k \leq -1$ 또는 $k \geq 1 \cdots \textcircled{1}$
또, 이차함수 $y = -x^2 + kx + 2k$ 의 그래프는 x 축과 만나지 않으므로
 $-x^2 + kx + 2k = 0$ 의 판별식을 D_2 라 할 때,
 $D_2 = k^2 + 8k < 0, k(k+8) < 0$
 $\therefore -8 < k < 0 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 의 공통범위를 구하면 $-8 < k \leq -1$
따라서 정수 k 는 $-7, -6, \dots, -2, -1$ 의 7개이다.

17. 이차함수 $y = x^2 - ax + 3$ 의 그래프가 직선 $y = 0$ 과 두 점에서 만나기 위한 자연수 a 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

이차함수 $y = x^2 - ax + 3$ 의 그래프가 x 축 ($y = 0$)과 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

즉 이차방정식 $x^2 - ax + 3 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

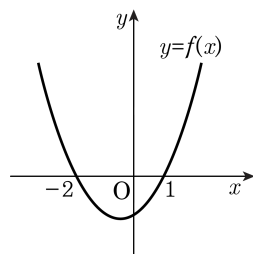
$D = a^2 - 12 > 0$ 에서

$a < -2\sqrt{3}$ 또는 $a > 2\sqrt{3}$

따라서 자연수 a 의 최솟값은 4이다.

18. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차함수 $f(x+a) = 0$ 의 두 실근의 합이 5 가 되도록 하는 상수 a 의 값은?

- ① -3 ② -2 ③ -1
 ④ 0 ⑤ 1



해설

$y = f(x+a)$ 의 그래프는 $y = f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-a$ 만큼 평행이동한 것이다.

$y = f(x)$ 이 그래프가

x 축과 만나는 점의 좌표가 $-2, 1$ 이므로

$y = f(x+a)$ 의 그래프가

x 축과 만나는 점의 좌표는 $-2-a, 1-a$

따라서, 방정식 $f(x+a) = 0$ 의 두 실근이

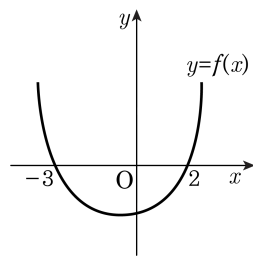
$-2-a, 1-a$ 이고

그 합이 5 이므로 $-2-a+1-a=5$

$\therefore a = -3$

19. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $f(x^2 - 1) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는?

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개
④ 4 개 ⑤ 5 개



해설

주어진 그래프에서 $f(-3) = 0$, $f(2) = 0$ 이므로

방정식 $f(x^2 - 1) = 0$ 의 근은

(i) $x^2 - 1 = -3$ 일 때, $x^2 = -2$ $\therefore x = \pm \sqrt{2}i$

(ii) $x^2 - 1 = 2$ 일 때, $x^2 = 3$ $\therefore x = \pm \sqrt{3}$

(i), (ii) 에서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2 개 이다.

20. 이차함수 $y = x^2 + ax + 1$ 의 그래프와 직선 $y = 3x - 8$ 이 만나지 않도록 하는 실수 a 의 값의 범위를 구하면?

- ① $-5 < a < -1$ ② $-3 < a < 9$ ③ $-1 < a < 4$
④ $2 < a < 6$ ⑤ $4 < a < 7$

해설

이차방정식 $x^2 + ax + 1 = 3x - 8$,
즉 $x^2 + (a - 3)x + 9 = 0$ 이 이차방정식이 허근을 가져야 하므로
 $D = (a - 3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 < 0$
 $a^2 - 6a - 27 < 0$
 $(a + 3)(a - 9) < 0$
 $\therefore -3 < a < 9$

21. 직선 $y = mx - 4$ 가 이차함수 $y = 2x^2 - 3$ 의 그래프에 접하도록 하는 양수 m 의 값은?

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $\sqrt{6}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

해설

이차방정식 $2x^2 - 3 = mx - 4$, 즉 $2x^2 - mx + 1 = 0$ 이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로

$$D = (-m)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 0$$

$$m^2 - 8 = 0, m^2 = 8$$

$$\therefore m = 2\sqrt{2} (\because m > 0)$$

22. 이차함수 $y = x^2 + (m-1)x + m^2 + 1$ 의 그래프가 직선 $y = x + 1$ 의 그래프보다 항상 위쪽에 존재하도록 하는 실수 m 의 값의 범위는?

- ① $m < -2$ 또는 $m > \frac{2}{3}$ ② $m < -1$ 또는 $m > \frac{1}{3}$
③ $m < \frac{1}{3}$ 또는 $m > 2$ ④ $m < \frac{2}{3}$ 또는 $m > 2$
⑤ $m < -2$ 또는 $m > 2$

해설

이차함수 $y = x^2 + (m-1)x + m^2 + 1$ 의 그래프가 직선 $y = x + 1$

보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 x 에 대하여

$$x^2 + (m-1)x + m^2 + 1 > x + 1$$

$$x^2 + (m-2)x + m^2 > 0 \text{이 항상 성립하여야 한다.}$$

따라서, 이차방정식 $x^2 + (m-2)x + m^2$ 의 판별식 $D < 0$ 이어야

한다.

$$D = (m-2)^2 - 4m^2 < 0$$

$$(m+2)(3m-2) > 0$$

$$\therefore m < -2 \text{ 또는 } m > \frac{2}{3}$$

23. 이차함수 $y = 2x^2 - mx + 3$ 과 직선 $y = 2x + 1$ 이 접할 때, 양수 m 의 값은?

① 2 ② 3 ③ 5 ④ 6 ⑤ 8

해설

이차함수와 직선이 접하면 두 방정식을 연립했을 때 판별식이 0 이다.

$$\begin{cases} y = 2x^2 - mx + 3 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x^2 - mx + 3 = 2x + 1$$

$$\Rightarrow 2x^2 - (m + 2)x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow D = (m + 2)^2 - 16 = 0$$

$$m = 2, -6$$

$$\therefore m = 2 \quad (\because m > 0)$$

24. 곡선 $y = -x^2 + kx$ 과 직선 $y = x + 1$ 이 서로 다른 두점에서 만나도록 하는 k 의 값이 아닌 것은?

① -6

② -3

③ 3

④ 6

⑤ 9

해설

곡선과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면
 $-x^2 + kx = x + 1$ 의 판별식이 0 보다 커야 한다.
 $\Rightarrow x^2 + (1 - k)x + 1 = 0$
 $D = (1 - k)^2 - 4 > 0, (k + 1)(k - 3) > 0$
 $k < -1$ 또는 $k > 3$
 $\therefore 3$ 은 주어진 조건을 만족시키지 못한다.

25. 직선 $y = ax + 1$ 이 이차함수 $y = x^2 - 3x + 5$ 의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나고, 이차함수 $y = x^2 + 3x + 5$ 의 그래프와는 만나지 않을 때, 상수 a 의 값의 범위를 구하면?

① $a < -7$ 또는 $a > 1$ ② $-1 < a < 7$

③ $a < 7$ ④ $-7 < a < 1$

⑤ $1 < a < 7$

해설

$ax + 1 = x^2 - 3x + 5$ 에서 $x^2 - (a + 3)x + 4 = 0$
서로 다른 두 점에서 만나므로

$$D = (a + 3)^2 - 4 \cdot 4 > 0$$

$$a < -7 \text{ 또는 } a > 1 \cdots \textcircled{㉠}$$

$ax + 1 = x^2 + 3x + 5$ 에서 $x^2 + (3 - a)x + 4 = 0$
만나지 않으므로 $D = (3 - a)^2 - 4 \cdot 4 < 0$

$$-1 < a < 7 \cdots \textcircled{㉡}$$

$\therefore \textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 의 공통범위는 $1 < a < 7$

26. 이차함수 $y = x^2 - ax + k^2 + 2k$ 의 그래프와 직선 $y = 2kx + b$ 가 k 의 값에 관계없이 서로 접할 때, 실수 a, b 의 곱 ab 의 값은?

① -6 ② -3 ③ -2 ④ 2 ⑤ 3

해설

$x^2 - ax + k^2 + 2k = 2kx + b$ 에서
 $x^2 - (a + 2k)x + k^2 + 2k - b = 0$
이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
 $D = (a + 2k)^2 - 4(k^2 + 2k - b) = 0$
 $a^2 + 4ak - 8k + 4b = 0$
이 식이 k 의 값에 관계없이 성립하므로
 $4k(a - 2) + a^2 + 4b = 0$ 에서
 $a - 2 = 0, a^2 + 4b = 0$
따라서 $a = 2, b = -1$ 이므로 $ab = -2$

27. 다음과 같은 포물선과 직선이 있다.

$$y = x^2 + (m - 1)x + m^2 + 1$$
$$y = x + 1$$

포물선이 직선보다 항상 위쪽에 존재하도록 m 의 범위를 정하여라.

- ① $m < -2, \ m > \frac{2}{3}$

② $m < -1, \ m > \frac{2}{3}$
- ③ $m < -2, \ m > 2$

④ $m < 2, \ m > \frac{2}{3}$
- ⑤ $m < -5, \ m > \frac{2}{3}$

해설

$x^2 + (m - 1)x + m^2 + 1 > x + 1$ 을 항상 만족시키도록 m 을 정하면 된다.

$x^2 + (m - 2)x + m^2 > 0$ 에서 판별식

$D = (m - 2)^2 - 4m^2 < 0,$

$(m - 2 + 2m)(m - 2 - 2m) < 0$

$(3m - 2)(m + 2) > 0$

$\therefore \ m < -2, \ m > \frac{2}{3}$

28. 이차함수 $y = x^2 + x - 1$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 m 만큼 평행이동하면 x 축과 서로 다른 두 점에서 만난다. 이때, 정수 m 의 최댓값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

이차함수 $y = x^2 + x - 1$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 1 만큼,
 y 축의 방향으로 m 만큼 평행이동하면
 $y - m = (x - 1)^2 + (x - 1) - 1$
 $\therefore y = x^2 - x - 1 + m$
이 함수의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식
 $x^2 - x - 1 + m = 0$ 에서
 $D = 1 - 4(-1 + m) > 0$
 $5 - 4m > 0 \quad \therefore m < \frac{5}{4}$
따라서 정수 m 의 최댓값은 1 이다.

29. 직선 $y = mx - 1$ 은 곡선 $y = x^2 + x$ 와 서로 다른 두 점에서 만나고, 곡선 $y = x^2 - x$ 와는 만나지 않는다고 한다. 이때, 실수 m 의 값의 범위는?

- ① $1 < m < 3$ ② $-1 < m < 3$ ③ $-1 < m < 1$
④ $-3 < m < 1$ ⑤ $-3 < m < -1$

해설

- (i) 직선 $y = mx - 1$ 과 곡선 $y = x^2 + x$ 가 서로 다른 두 점에서 만나므로
이차방정식 $x^2 + (1 - m)x + 1 = 0$ 의 판별식을 D_1 이라하면
 $D_1 = (1 - m)^2 - 4 > 0$ 에서 $m^2 - 2m - 3 > 0$
 $\therefore m < -1$ 또는 $m > 3 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$
(ii) 직선 $y = mx - 1$ 과 곡선 $y = x^2 - x$ 는 만나지 않으므로
이차방정식 $x^2 - (m + 1)x + 1 = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면
 $D_2 = (m + 1)^2 - 4 < 0$ 에서 $m^2 + 2m - 3 < 0$
 $\therefore -3 < m < 1 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$
따라서 ①, ②의 공통범위를 구하면
 $-3 < m < -1$

30. 이차함수 $y = x^2 + 2px + q$ 의 그래프가 점 $(-1, 4)$ 를 지나고 x 축에 접하도록 하는 상수 p, q 의 값은?

① $p = -1, q = -1$ 또는 $p = -3, q = -9$

② $p = -1, q = 1$ 또는 $p = -3, q = 9$

③ $p = -1, q = 1$ 또는 $p = 3, q = 9$

④ $p = 1, q = 1$ 또는 $p = -3, q = 9$

⑤ $p = 1, q = 1$ 또는 $p = 3, q = 9$

해설

이차함수 $y = x^2 + 2px + q$ 의 그래프가

점 $(-1, 4)$ 를 지나므로

$$4 = 1 - 2p + q \text{에서}$$

$$2p - q = -3 \cdots \textcircled{1}$$

한편, x 축에 접하므로

$$D/4 = p^2 - q = 0 \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$p = -1, q = 1 \text{ 또는 } p = 3, q = 9$$

31. 이차함수 $y = x^2 - 2ax + a^2 + 2a - 1$ 의 그래프가 a 의 값에 관계없이 직선 $y = mx + n$ 과 접할 때, 상수 m, n 의 합 $m + n$ 의 값은?

① -4 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 2

해설

이차함수 $y = x^2 - 2ax + a^2 + 2a - 1$ 의 그래프가

직선 $y = mx + n$ 과 접하므로

$$x^2 - 2ax + a^2 + 2a - 1 = mx + n$$

$$\text{즉, } x^2 - (2a + m)x + a^2 + 2a - n - 1 = 0$$

$$\therefore 4am + m^2 - 8a + 4n + 4 = 0$$

이 식이 a 의 값에 관계없이 성립하므로

$$(4m - 8)a + (m^2 + 4n + 4) = 0$$

$$4m - 8 = 0, \quad m^2 + 4n + 4 = 0 \text{에서}$$

두 식을 연립하여 풀면 $m = 2, n = -2$

$$\therefore m + n = 0$$

32. 유리수 a, b 에 대하여 곡선 $y = x^2 - a$ 와 $y = bx$ 가 두 점 P, Q 에서 만난다. 점 P 의 x 좌표가 $\sqrt{5} + 1$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

두 곡선 $y = x^2 - a$ 와 $y = bx$ 의 교점의 x 좌표는 $x^2 - bx - a = 0$ 의 두 근이다.

$\sqrt{5} + 1$ 이 근이므로, $-\sqrt{5} + 1$ 도 근이다.

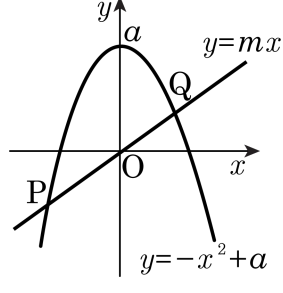
근과 계수의 관계에 의해

$$b = \sqrt{5} + 1 - (-\sqrt{5} + 1) = 2$$

$$-a = (\sqrt{5} + 1)(-\sqrt{5} + 1) = -4$$

$$\therefore a = 4 \quad \therefore a + b = 6$$

33. 다음 그림과 같이 이차함수 $y = -x^2 + a$ 의 그래프와 직선 $y = mx$ 가 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 점 Q의 x 좌표가 $\sqrt{5} - 1$ 일 때, $a + m$ 의 값을 구하여라. (단, a, m 은 유리수)



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y = -x^2 + a$ 와 $y = mx$ 가 만나는 두 점 P, Q의 x 좌표는 방정식이 $-x^2 + a = mx$ 의 근이다.

점 Q의 x 좌표가 $\sqrt{5} - 1$ 이므로

방정식 $x^2 + mx - a = 0$ 의 한 근이 $\sqrt{5} - 1$ 이다.

그런데 a 와 m 이 유리수이므로 다른 한 근은 $-\sqrt{5} - 1$ 이다.

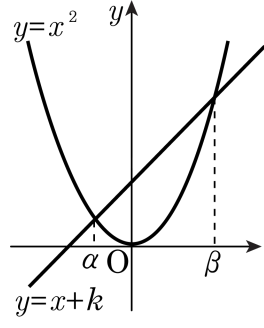
따라서, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-m = (\sqrt{5} - 1) + (-\sqrt{5} - 1) = -2$$

$$-a = (\sqrt{5} - 1)(-\sqrt{5} - 1) = -4$$

$$\therefore a = 4, m = 2 \quad \therefore a + m = 6$$

34. 이차함수 $y = x^2$ 과 일차함수 $y = x + k$ 의 그래프가 다음 그림과 같이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?



보기

- ㉠ $\alpha + \beta = 1$ ㉡ $k > 0$ ㉢ $\alpha\beta = -k$

- ① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢
 ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

두 함수 $y = x^2$ 과 $y = x + k$ 의 그래프가 만나는 두 점의 x 좌표가 α, β 이므로 이차방정식 $x^2 = x + k$, 즉 $x^2 - x - k = 0$ 은 서로 다른 두 실근 α, β 를 갖는다.

㉠ 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 1 \cdots (\text{참})$$

㉡ 이차방정식 $x^2 - x - k = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D = 1 + 4k > 0$

$$\text{에서 } k > -\frac{1}{4} \cdots (\text{거짓})$$

㉢ 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha\beta = -k \cdots (\text{참})$$

따라서, 옳은 것은 ㉠, ㉢이다.

35. $y = x^2 - (a^2 - 4a + 3)x + a^2 + 2$ 와 $y = x$ 의 두 교점이 원점에 관하여 대칭이다. 이 때, a 의 값을 구하면?

① 4

② 2

③ -4

④ -2

⑤ 3

해설

$$y = x^2 - (a^2 - 4a + 3)x + a^2 + 2$$

$$y = x \text{ 의 교점은 } x^2 - (a^2 - 4a + 3)x + a^2 + 2 = x$$

$$x^2 - (a^2 - 4a + 4)x + a^2 + 2 = 0 \text{ 의 두 근을 } \alpha, \beta \text{ 라면}$$

두 근이 원점에 대칭이므로 중점은 원점이다.

$$\therefore \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{(a - 2)^2}{2} = 0$$

$$\therefore a = 2$$

36. 이차함수 $y = x^2 + 3x + 1$ 의 그래프와 직선 $y = -x + 3$ 의 두 교점의 좌표를 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 라 할 때, $y_1 y_2$ 의 값은?

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

해설

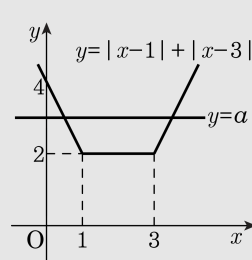
두 교점의 x 좌표 x_1, x_2 는
방정식 $x^2 + 3x + 1 = -x + 3$ 의 실근이다.
 $x^2 + 4x - 2 = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여
 $x_1 + x_2 = -4$, $x_1 x_2 = -2$
 $\therefore y_1 y_2 = (-x_1 + 3)(-x_2 + 3)$
 $= x_1 x_2 - 3(x_1 + x_2) + 9$
 $= -2 + 12 + 9 = 19$

37. x 의 방정식 $|x-1| + |x-3| = a$ 가 서로 다른 두 개의 실근을 가질 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $a < 1$ ② $a > 1$ ③ $a < 2$ ④ $a > 2$ ⑤ $a < 3$

해설

좌 우변을 각각 그래프를 그려보면
 $a > 2$



38. x 에 대한 방정식 $|x^2 + 2x - 3| = k$ 가 양의 근 2개와 음의 근 2개를 갖도록 하는 상수 k 의 값의 범위는?

① $k \geq 3$

② $k > 4$

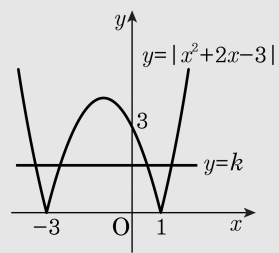
③ $3 \leq k < 4$

④ $0 < k < 3$

⑤ $0 < k < 4$

해설

방정식 $|x^2 + 2x - 3| = k$ 의 근은
 두 함수 $y = |x^2 + 2x - 3|$, $y = k$ 의
 그래프의 교점의 x 좌표와 같다.
 따라서 그림에서 교점의 x 좌표가 양
 수 2개,
 음수 2개가 되려면 $0 < k < 3$

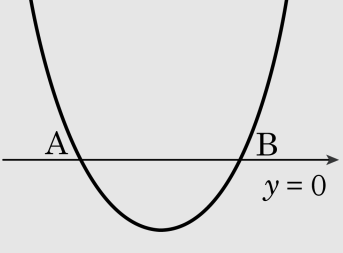


39. 이차함수 $y = x^2 + ax + a$ 가 x 축과 두 점 A, B 에서 만날 때, $\overline{AB} = 2\sqrt{3}$ 이 되도록 하는 양수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

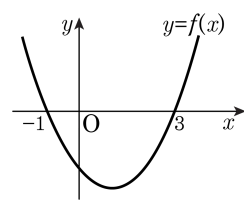
▷ 정답 : $a = 6$

해설



A(α , 0) B(β , 0) 이라고 하면 ($\therefore \alpha < \beta$)
 $\alpha + \beta = -a$
 $\alpha\beta = a$ 이므로
($\therefore y = x^2 + ax + a$)
 $(\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = a^2 - 4a$
 $\overline{AB} = \beta - \alpha = 2\sqrt{3}$ 이므로
 $a^2 - 4a = 12$
 $(a - 6)(a + 2) = 0$
 $\therefore a = -2, 6$

40. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차방정식 $f(2x-1) = 0$ 의 두 근의 합은?



- ① -1 ② 0 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

해설

$y = f(x)$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 $-1, 3$ 이므로
 $f(x) = a(x+1)(x-3) (a > 0)$ 으로 놓을 수 있다.
이때, $f(2x-1) = a(2x-1+1)(2x-1-3) = 4ax(x-2)$ 이므로
 $f(2x-1) = 0$ 에서
 $4ax(x-2) = 0$
 $\therefore x = 0$ 또는 $x = 2$
따라서 두 근의 합은 2이다.

41. 함수 $y = |x - 2| + 1$ 의 그래프가 직선 $y = mx + m$ 과 만나기 위한 양수 m 의 최솟값은?

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{4}{3}$

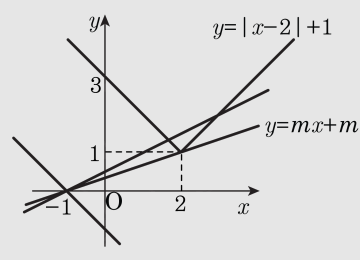
해설

$x \geq 2$ 일 때, $|x - 2| = x - 2$ 이므로

$$y = x - 2 + 1 = x - 1$$

$x < 2$ 일 때, $|x - 2| = -(x - 2)$ 이므로 $y = -x + 2 + 1 = -x + 3$

따라서, $y = |x - 2| + 1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



또, 직선 $y = mx + m = m(x + 1)$ 은 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(-1, 0)$ 을 지난다.

직선 $y = mx + m$ 이 점 $(2, 1)$ 을 지날 때, $1 = 2m + m \therefore m = \frac{1}{3}$

직선 $y = mx + m$ 이 직선 $y = -x + 3$ 과 평행할 때, $m = -1$

따라서, 직선 $y = mx + m$ 이 $y = |x - 2| + 1$ 의 그래프와 만나려면

가울기 m 의 값의 범위가

$m \geq \frac{1}{3}$ 또는 $m < -1$ 이어야 한다.

그런데 양수 m 이므로 $m \geq \frac{1}{3}$ 그러므로 구하는 m 의 최솟값은 $\frac{1}{3}$

이다.

42. x 에 관한 방정식 $|x^2 - 1| - x - k = 0$ 이 서로 다른 네 개의 실근을 가질 때, k 의 값의 범위를 구하면?

- ① $1 < k < \frac{5}{4}$ ② $1 \leq k \leq \frac{5}{4}$ ③ $-5 < k < -\frac{5}{4}$
 ④ $k < 1, k > \frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{4}{5} < k < 1$

해설

$|x^2 - 1| - x - k = 0$ 을 변형하여
 분리하면

$$|x^2 - 1| = x + k, y = |x^2 - 1|, y = x + k$$

이 두 함수가 4개의 교점을 가지려면

다음그림과 같아야 한다.

$$y = -x^2 + 1, y = x + k \text{가}$$

두 점에서 만나야하므로

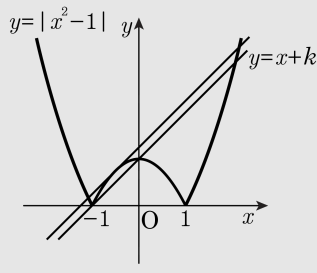
$x^2 + x + k - 1 = 0$ 의 판별식 $D > 0$ 이어야 한다.

$$D = 1 - 4k + 4 > 0 \quad \therefore k < \frac{5}{4}$$

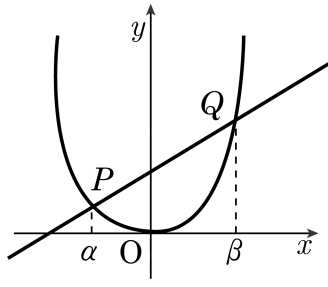
또, 직선 $y = x + k$ 는 점 $(-1, 0)$ 을 지나는 직선 위에 존재해야하므로

$$0 < -1 + k \quad \therefore k > 1$$

$$\therefore 1 < k < \frac{5}{4}$$

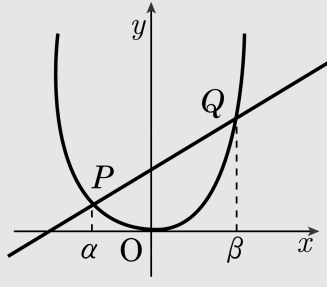


43. 포물선 $y = x^2$ 과 직선 $y = m(x + 3)$ 이 서로 다른 두 점 P, Q 에서 만나고 원점을 연결한 선분 OP 와 OQ 가 수직이 될 때, m 의 값은?



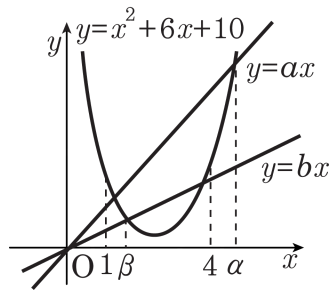
- ① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

해설



교점 P, Q 의 좌표는
 $x^2 = m(x + 3)$, $x^2 - mx - 3m = 0$ 의 두 근이므로
 두 근을 α, β 라 하면 $\alpha + \beta = m, \alpha\beta = -3m$
 $\overline{OP}$ 의 기울기 : $\frac{\alpha^2}{\alpha} = \alpha$, $\overline{OQ}$ 의 기울기 : $\frac{\beta^2}{\beta} = \beta$
 두 직선이 수직이므로 $\alpha\beta = -1, -3m = -1$
 $\therefore m = \frac{1}{3}$

44. 다음 그림과 같이 $y = x^2 - 6x + 10$ 의 그래프가 직선 $y = ax$ 와 만나는 두 교점이 x 좌표가 각각 1, α 이고 직선 $y = bx$ 와 만나는 두 교점의 x 좌표가 각각 β , 4 일 때, $\frac{a}{b} + \frac{\alpha}{\beta}$ 의 값을 구하시오.



▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

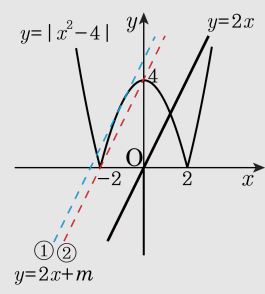
방정식 $x^2 - 6x + 10 = ax$
 즉, $x^2 - (a + 6)x + 10 = 0$ 의 두 근이 1, α 이므로
 $1 + \alpha = a + 6$
 $1 \cdot \alpha = 10$
 $\therefore \alpha = 10, a = 5$
 방정식 $x^2 - 6x + 10 = bx$
 즉, $x^2 - (b + 6)x + 10 = 0$ 의 두 근이 β , 4 이므로
 $\beta + 4 = b + 6$
 $4 \cdot \beta = 10$
 $\therefore \beta = \frac{5}{2}, b = \frac{1}{2}$
 $\therefore \frac{a}{b} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{5}{\frac{1}{2}} + \frac{10}{\frac{5}{2}} = 10 + 4 = 14$

45. x 에 대한 방정식 $|x^2 - 4| = 2x + m$ 이 서로 다른 4개의 실근을 가질 때, 실수 m 의 값 또는 m 의 값의 범위는?

- ① $-4 < m < 4$ ② $m = -4$
 ③ $m = 4$ 또는 $m = 5$ ④ $4 < m < 5$
 ⑤ $m > 5$

해설

$y = |x^2 - 4|$ 와 $y = 2x + m$ 을 그래프로 나타내면



서로 다른 4개의 실근을 가지는 경우는 ①, ②번 그래프와 같다.

① $-x^2 + 4 = y$ 와 $2x + m = y$ 이 접하는 경우

$$-x^2 + 4 = 2x + m$$

$$x^2 + 2x + m - 4 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 1 - m + 4 = 0$$

$$\therefore m = 5$$

② $y = 2x + m$ 이 $(-2, 0)$ 을 지나는 경우

$$0 = -4 + m$$

$$\therefore m = 4$$

구하는 식은 ①, ②번 그래프 사이이므로

$$\therefore 4 < m < 5$$