

1. 점 (5, 1)과 (-1, 7)을 지름의 양 끝으로 하는 원의 방정식은?

① $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 12$ ② $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 15$

③ $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 18$ ④ $(x-2)^2 + (y-6)^2 = 21$

⑤ $(x-4)^2 + (y-6)^2 = 25$

해설

두 점의 중점을 C라 하면 C(2,4)

구하는 원의 반지름의 길이는

$$r = \sqrt{(2-(-1))^2 + (4-7)^2} = \sqrt{18}$$

$$\therefore (x-2)^2 + (y-4)^2 = 18$$

2. 점 (2, 1) 을 지나고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 반지름의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

원이 점 (2, 1) 을 지나고 x 축, y 축에 접하면 제 1 사분면에 위치하므로 반지름이 r 이면 중심이 (r, r) 이다.

$$(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2 \text{ 이고}$$

또한 (2, 1) 을 지나므로

$$(2-r)^2 + (1-r)^2 = r^2 ,$$

$$(r-1)(r-5) = 0$$

$$\therefore r = 1 \text{ 또는 } 5$$

$$\therefore (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \text{ 또는 } (x-5)^2 + (y-5)^2 = 5^2$$

$$\therefore 1 + 5 = 6$$

3. 두 원 $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 8 = 0$, $x^2 + y^2 - 4y = 0$ 의 공통현의 방정식은?

① $x - 5y + 4 = 0$

② $4x - 3y + 4 = 0$

③ $3x - 3y + 4 = 0$

④ $x - y + 4 = 0$

⑤ $2x - y + 1 = 0$

해설

두 원의 공통현의 방정식은

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 8 - (x^2 + y^2 - 4y) = 0$$

$$2x - 2y + 8 = 0$$

$$\therefore x - y + 4 = 0$$

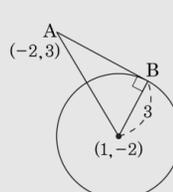
4. 점 A(-2, 3) 에서 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 에 그은 접선의 접점을 B 라 할 때, AB 의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 &= 0 \\(x - 1)^2 + (y + 2)^2 &= 3^2 \\ \text{원의 중심은 } (1, -2), \text{ 반지름은 } 3 \text{ 이므로} \\ \overline{AB} &= \sqrt{(3^2 + (-5)^2) - 3^2} = 5\end{aligned}$$



5. 원 $x^2 + y^2 = 10$ 위의 점 $(1, -3)$ 에서 원에 그은 접선의 x 절편은?

- ① -10 ② $-\frac{10}{3}$ ③ -1 ④ 10 ⑤ $\frac{10}{3}$

해설

점 $(1, -3)$ 에서 그은 접선의 방정식은
 $1x - 3y = 10$
 x 절편은 $y = 0$ 일 때의 x 좌표이므로 $x = 10$

6. 점 $A(4, 0)$ 과 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점을 이은 선분의 중점의 자취의 넓이는?

- ① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ $\frac{\pi}{3}$ ④ $\frac{\pi}{4}$ ⑤ π

해설

$x^2 + y^2 = 4$ 위의 점을 $P(a, b)$ 라 하면

$A(4, 0), P(a, b)$ 의 중점의 좌표 $M(x, y)$ 는

$M\left(\frac{a+4}{2}, \frac{b}{2}\right)$ 이다.

$$\therefore x = \frac{a+4}{2}, y = \frac{b}{2}$$

$$\therefore a = 2x - 4, b = 2y$$

이 때, 점 P 는 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점이므로 $a^2 + b^2 = 4$ 가 성립한다.

$$(2x - 4)^2 + (2y)^2 = 4, (x - 2)^2 + y^2 = 1$$

따라서 구하는 중점의 자취는 중심이 $(2, 0)$,

반지름의 길이가 1인 원이므로

$$\text{원이 넓이 } S \text{ 는 } S = \pi \cdot 1^2 = \pi$$

7. 직선 $y = x + 4$ 가 원 $x^2 + y^2 = 9$ 에 의해서 잘린 현의 길이를 구하여라.

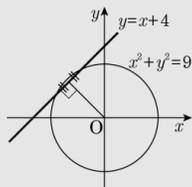
▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

원의 중심 원점에서 직선에 이르는 거리는 직선 $x - y + 4 = 0$

이므로 $\frac{|4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$



원의 중심에서 현에 내린 수선은 현을 수직이등분하므로 피타고라스 정리에서,

현의 길이는 $2\sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2$

8. 점 $(3, -1)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 5$ 에 그은 접선의 방정식 중 기울기가 음수인 것의 y 절편을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $(3, -1)$ 을 지나고 접선의 기울기를 m 이라고 하면

접선은 $y + 1 = m(x - 3) \dots \textcircled{1}$

따라서 원의 중심 $(0, 0)$ 에서 직선

$mx - y - 3m - 1 = 0$ 과의 거리가

원의 반지름 $\sqrt{5}$ 와 같다.

$$\frac{|-3m - 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5}, |-3m - 1| = \sqrt{5} \sqrt{m^2 + 1}$$

양변을 제곱하면

$$9m^2 + 6m + 1 = 5m^2 + 5, 4m^2 + 6m - 4 = 0$$

따라서, 기울기 $m = \frac{1}{2}, -2$

여기서 기울기가 음수인 -2 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$y = -2x + 5$$

따라서 y 절편은 5이다.

9. 두 점 A(-4, 2), B(2, -1)로부터 거리의 비가 2 : 1 인 점이 나타내는 원의 중심과 직선 $y = 3x - 4$ 의 거리는?

- ① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $\sqrt{6}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{10}$

해설

$$\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$$

$$2\overline{BP} = \overline{AP}$$

$$4\overline{BP}^2 = \overline{AP}^2$$

$$4 \cdot \{(x-2)^2 + (y+1)^2\} = (x+4)^2 + (y-2)^2$$

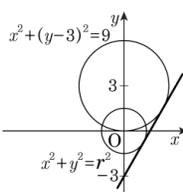
$$3x^2 + 3y^2 - 24x + 12y = 0$$

$$(x-4)^2 + (y+2)^2 = 20$$

원의 중심 (4, -2)와 직선 $3x - y - 4 = 0$ 간의 거리

$$\therefore \frac{|12 + 2 - 4|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

10. 다음 그림과 같이 두 원 $x^2 + y^2 = r^2$, $x^2 + (y-3)^2 = 9$ 의 공통 외접선 l 의 y 절편이 -3 이다. 직선 l 의 기울기를 m 이라고 하면 $\frac{m^2}{r}$ 의 값은?(단, $0 < r < 3$)



- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{\frac{3}{2}}$
 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

해설

y 절편이 -3 인 직선의 방정식을 $y = mx - 3$ 이라 하면
 $x^2 + (y-3)^2 = 9$ 와 l 이 접하므로,

$$\frac{|-3-3|}{\sqrt{m^2+1^2}} = 3, \quad m^2 = 3$$

그리고 원만 따로 떼어내어 생각해 보면,
 그림과 같이 두 직각삼각형은 닮음으로 닮음
 비가 2:1이다.

$$6:3 = 3:r \quad \therefore r = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \frac{m^2}{r} = 2$$

