1. 1999×2001 의 값을 구하려 할 때, 가장 적절한 곱셈공식은?

① $m(a+b) = ma + mb$

② $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

③ $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

④ $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

⑤ $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$

해설

$$\begin{aligned} 1999 \times 2001 &= (2000-1) \times (2000+1) \\ &= 2000^2 - 1^2 \end{aligned}$$

2. 다음 등식 중에서 x에 어떤 값을 대입하여도 항상 성립하는 것을 모두 고르면?

① $(x-2)(x+2)=x^2-4$ ② $x^2-x=x(x+2)$

③ $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ ④ $x(x-2)=0$

⑤ $x+y=x-y$

해설

②는 $x=0$일 때만 성립하고,
④는 $x=0, 2$일 때만 성립한다.
그리고 ⑤는 $y=0$일 때만 성립한다.
①과 ③은 모든 실수에 대하여 성립한다.

3. 다항식 $2x^3+x^2+x+1$를 $2x-1$ 로 나눈 몫과 나머지를 순서대로 나열한 것은?

① $x^2+x+1,\ 1$　② $x^2+x+1,\ 2$
③ $2x^2+2x+2,\ 1$　④ $2x^2+2x+2,\ 2$
⑤ $4x^2+4x+4,\ 4$

해설

다항식 $2x^3+x^2+x+1$를 $2x-1$ 로 나눈 몫과 나머지를 각각 $Q(x)$, R이라고 하면
$$\begin{aligned} 2x^3+x^2+x+1 &= (2x-1)Q(x)+R \\ &= \left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot 2Q(x)+R \end{aligned}$$
이므로

$$\begin{array}{c|cccc} \frac{1}{2} & 2 & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 2 & 2 & 2 & \boxed{2} \end{array}$$

$2Q(x)=2x^2+2x+2$
$\therefore\ Q(x)=x^2+x+1,\ R=2$

4. $2012 = k$라 할 때, 2013×2011을 k로 나타내면?

① $k^2 + k$　　② $k^2 - 1$　　③ $k^2 + k + 1$

④ $k^2 - k + 1$　　⑤ $k^2 - k$

해설

$$\begin{aligned} 2013 \times 2011 &= (k+1)(k-1) \\ &= k^2 - 1 \end{aligned}$$

5. $\frac{3+4i}{1+3i}$ 를 $a+bi$ 의 꼴로 나타 낼 때, $a-b$ 의 값은? (단, a , b 는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

① 2　　② -2　　③ 1　　④ -1　　⑤ 0

해설

분모의 실수화를 해준다.

$\frac{3+4i}{1+3i}=\frac{(3+4i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$

$\therefore a-b=2$

6. $a < b$일 때, □안의 등호가 알맞은 것을 모두 고르면?

㉠ $a+2 \boxed{<} b+2$	㉡ $-a-4 \boxed{>} -b-4$
㉢ $\frac{1}{2}a+3 \boxed{>} \frac{1}{2}b+3$	㉣ $-\frac{a}{3} \boxed{<} -\frac{b}{3}$

① ㉠　② ㉠, ㉡　③ ㉡, ㉣
④ ㉠, ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉣

해설

㉢ 부등식의 양변에 양수를 곱하거나 같은 수를 더하더라도 부등호의 방향이 바뀌지 않으므로 $\frac{1}{2}a+3 < \frac{1}{2}b+3$

㉣ 부등식의 양변을 음수로 나누면 부등호의 방향이 바뀌므로 $-\frac{a}{3} > -\frac{b}{3}$

7. 부등식 $ax+1 \geq 2x+5$의 해가 $x \geq 2$일 때, 상수 a의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 4 ⑤ 7

해설

$ax+1 \geq 2x+5$에서 $(a-2)x \geq 4$의 부등식의 해가 $x \geq 2$이므로 $a-2>0$

$x \geq \dfrac{4}{a-2}$이므로 $\dfrac{4}{a-2}=2,\ a-2=2$

$\therefore a=4$

8. 연립부등식 $\begin{cases} x-4<2x+1 \\ 3x-6 \le 3 \end{cases}$ 를 풀면?

① $5<x\le 7$　② $-5<x\le x7$　③ $-5<x\le 3$
④ $-3\le x<5$　⑤ $-7\le x<-5$

해설

$\begin{cases} x-4<2x+1 \\ 3x-6\le 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-5 \\ x\le 3 \end{cases}$

$\therefore\ -5<x\le 3$

9. 다항식 $2x^3+ax^2+bx+8$이 $x-1$과 $x-2$로 각각 나누어 떨어지도록 하는 상수 a, b의 값은?

① $a=-2,\ b=-8$
② $a=3,\ b=4$
③ $a=-1,\ b=-3$
④ $a=4,\ b=-2$
⑤ $a=-3,\ b=7$

해설

$f(x)=2x^3+ax^2+bx+8$로 놓으면
$x-1$과 $x-2$로 각각 나누었을 때 나머지가 0이므로 $f(1)=0,\ f(2)=0$이어야 한다.

$\therefore f(1)=2+a+b+8=0,$
$f(2)=16+4a+2b+8=0$

$\therefore\ a+b=-10,\ 2a+b=-12$
두 식을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=-8$

10. $i(x+2i)^2$ 이 실수가 되는 실수 x 의 값을 정하면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① ±1 ② ±2 ③ ±3 ④ ±4 ⑤ ±5

해설

$$i(x+2i)^2 = i(x^2+4ix-4) = x^2i-4x-4i$$
$$= -4x+(x^2-4)i$$

실수가 되려면 허수부분이 0이면 된다.

$\therefore\ x^2-4=0 \quad \Rightarrow \quad x=\pm2$

11. 실수 $x,\ y$에 대하여 $(1+i)x+(i-1)y=2i$일 때, $x+y$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$(1+i)x+(i-1)y=2i$

$(x-y)+(x+y)i=2i$

좌변과 우변이 같아야 하므로, $x-y=0,\ x+y=2$

두 식을 연립하여 풀어주면, $\therefore\ x=1,\ y=1$

$\therefore\ x+y=2$

12. x 가 실수 일 때, 다음 중 $x+\frac{1}{x}$ 의 값이 될 수 없는 것은? (단, $x \neq 0$)

① -5　② -2　③ 1　④ 3　⑤ 5

해설

$x+\frac{1}{x}=t$ 라 하고,
양변에 x 를 곱하면
$x^2+1=tx$
$x^2-tx+1=0$ 에서 x 는 실수이므로
$D=t^2-4 \geq 0 \quad \therefore t^2 \geq 4,\ t \leq -2$ 또는 $t \geq 2$

13. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 2, 3일 때, 이차방정식 $ax^2+bx+3=0$의 두 근의 합은?

① $\frac{1}{5}$　② $\frac{2}{5}$　③ $\frac{3}{5}$　④ $\frac{4}{5}$　⑤ $\frac{6}{5}$

해설

$-a=2+3$, $a=-5$

$b=2\cdot 3=6$

$\therefore\ -5x^2+6x+3=0$에서

두 근의 합은 $\frac{6}{5}$

14. 함수 $y=-x^2+kx$의 그래프가 직선 $y=-x+4$에 접할 때, 양수 k의 값은?

① 1　② $\frac{3}{2}$　③ 2　④ $\frac{5}{2}$　⑤ 3

해설

$y=-x^2+kx$가 $y=-x+4$에 접하려면
$4-x=-x^2+kx \;\Rightarrow\; x^2-(k+1)x+4=0$의 판별식은 $D=0$
이어야 한다.
$D=(k+1)^2-16=0 \;\Rightarrow\; k+1=\pm 4$
$\therefore k=3 \;(\because k>0)$

15. 이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 가 $x = -1$ 에서 최댓값 7 을 갖고, $f(2) = -2$ 를 만족할 때, 상수 $a + b + c$ 의 값을 구하면?

① 3　② 7　③ 11　④ −3　⑤ −5

해설

$f(x) = a(x+1)^2 + 7, f(2) = -2$
$\Rightarrow 3^2 \times a + 7 = -2, a = -1$
$\therefore\ f(x) = -(x+1)^2 + 7 = -x^2 - 2x + 6$
따라서 $a + b + c = 3$

16. 합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x , 두 수의 곱을 y 라 할 때, 두 수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 11 ② 21 ③ 25 ④ 81 ⑤ 100

해설

합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x 로 두면 나머지 한 수는 $(18-x)$ 이다.

$y = x(18-x) = -x^2 + 18x = -(x^2 - 18x + 81) + 81$

$y = -(x-9)^2 + 81$

따라서 두 수의 곱의 최댓값은 81 이다.

17. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$ 의 해를 순서쌍 (x, y)으로 나타내면?

① $(2, 1)$ ② $(\sqrt{2}+1,\ \sqrt{2})$ ③ $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$
④ $(\sqrt{3}, 1)$ ⑤ $\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$

해설

$\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \ \cdots \ ㉠ \\ x - y = 1 \ \ \cdots \ ㉡ \end{cases}$

㉡을 $y = x - 1$로 변형하여
㉠에 대입하면
$x^2 - (x-1)^2 = x^2 - x^2 + 2x - 1 = 2$
$2x = 3$
$\therefore\ x = \frac{3}{2},\ y = \frac{1}{2}$

18. 다항식 $f(x)$를 다항식 $g(x)$로 나눈 나머지를 $r(x)$라 할 때, $f(x)-g(x)-2r(x)$를 $g(x)$로 나눈 나머지는?

① $-2r(x)$ ② $-r(x)$ ③ 0
④ $r(x)$ ⑤ $2r(x)$

해설

$f(x)$를 $g(x)$로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면
$f(x)=g(x)Q(x)+r(x)$
$\therefore f(x)-g(x)-2r(x)$
$=g(x)Q(x)+r(x)-g(x)-2r(x)$
$=g(x)\{Q(x)-1\}-r(x)$
여기서 $g(x)$의 차수는 $-r(x)$의 차수보다 높으므로 구하는 나머지는 $-r(x)$이다.

19. 세 모서리의 길이의 합이 22이고 대각선의 길이가 14인 직육면체의 겉넓이는?

① 144 ② 196 ③ 288 ④ 308 ⑤ 496

해설

세 모서리를 $x,\ y,\ z$라 하면

$x+y+z=22\cdots\cdots$①

$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=14\cdots\cdots$②이고

겉넓이는 $2(xy+yz+zx)$이다.

①, ② 에서 $22^2=14^2+2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ 2(xy+yz+zx)=288$

20. 다항식 $f(x)$를 일차식 $ax+b(a \neq 0)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라 할 때,
$xf(x)$를 $ax+b$로 나눈 나머지를 구하면?

① R　② aR　③ bR　④ $-\frac{b}{a}R$　⑤ $\frac{R}{a}$

해설

$f(x)=(ax+b)Q(x)+R \quad \therefore\ R=f(-\frac{b}{a})$

$g(x)=xf(x)$를 $ax+b$로 나눈 나머지는

$g(-\frac{b}{a})=-\frac{b}{a}f(-\frac{b}{a})=-\frac{b}{a}R$

21. 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$가 다음 두 조건을 만족한다.

(가) $f(x)+g(x)=2x^2-2x-4$
(나) $f(x)$와 $g(x)$의 최소공배수는 x^3-7x+6

이 때, $f(x)$와 $g(x)$의 최대공약수를 $G(x)$라 할 때, $G(2)$의 값은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

두 다항식 $f(x)$와 $g(x)$의 최소공배수는

$$L(x)=(x-1)(x^2+x-6)$$
$$=(x-1)(x-2)(x+3)\cdots ㉠$$

또, 두 다항식 $f(x)$와 $g(x)$의 최대공약수가 $G(x)$이므로

$f(x)=G(x)A(x)$, $g(x)=G(x)B(x)$

($A(x)$, $B(x)$는 서로소)라 하면

$$f(x)+g(x)=G(x)A(x)+G(x)B(x)$$
$$=G(x)\{A(x)+B(x)\}$$ 이므로

$f(x)+g(x)$는 $G(x)$를 인수로 갖는다.

$$f(x)+g(x)=2x^2-2x-4=2(x^2-x-2)$$
$$=2(x-2)(x+1)\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $G(x)=x-2$

$\therefore\ G(2)=0$

22. 이차방정식 $x^2 - 2kx + k^2 - 2k - 3 = 0$의 두 근이 모두 음수 일 때, k의 범위를 구하면?

① $-\frac{3}{2} \le k < -1$　　② $-\frac{3}{2} < k < 0$

③ $-1 < k < 0$　　④ $-1 < k < 3$

⑤ $k < 0$ 또는 $k > 3$

해설

(i) 판별식이 0보다 크거나 같다.

$D' = k^2 - (k^2 - 2k - 3) \ge 0$에서

$k \ge -\frac{3}{2}$

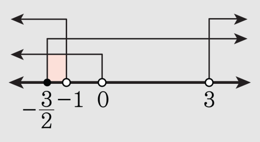
(ii) 두 근의 곱은 0보다 크다.

$k^2 - 2k - 3 > 0$에서 $(k+1)(k-3) > 0$

$\therefore k < -1$ 또는 $k > 3$

(iii) 두 근의 합이 0보다 작다.

$2k < 0 \therefore k < 0$



공통범위를 구하면, $-\frac{3}{2} \le k < -1$

23. 이차함수 $y=-2x^2-6ax-\frac{43}{3}$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x=3$ 이고, 최댓값이 b 일 때, 상수 a , b 의 합 $a+b$ 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{5}{3}$ ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

해설

축의 방정식이 $x=3$ 이고 최댓값이 b 이므로

$y=-2(x-3)^2+b$

$=-2(x^2-6x+9)+b$

$=-2x^2-6ax-\frac{43}{3}$

$y=-2x^2+12x+b-18=-2x^2-6ax-\frac{43}{3}$ 에서

$a=-2,\ b=\frac{11}{3}$

$\therefore a+b=\frac{5}{3}$

24. $x^2 - 5x + 6 < 0$ 일 때, $P = x^2 + 5x + 6$ 이 취할 수 <u>없는</u> 값은?

① 22　② 24　③ 26　④ 28　⑤ 30

해설

$x^2 - 5x + 6 < 0$, $(x-2)(x-3) < 0$　$\therefore\ 2 < x < 3$

이 때, $P = x^2 + 5x + 6 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ 이므로

$2 < x < 3$ 인 구간에서의 P 는 증가함수이다.

따라서 $P_{x=2} < P < P_{x=3}$ 이 성립한다.

$P_{x=2} = 20,\ P_{x=3} = 30$ 이므로 $20 < P < 30$

25. 방정식 $x^2+x+1=0$의 한 근을 ω라 할 때, $\dfrac{2w^2+3\overline{w}}{w^{100}+1}$의 값을 구하면?
(단, $\overline{w}$는 w의 켤레복소수이다.)

① 2　② 3　③ 5　④ −3　⑤ −5

해설

$x^2+x+1=0$의 두 근은
$\omega, \overline{\omega} \Rightarrow \omega+\overline{\omega}=-1,\ \omega\overline{\omega}=1$
$\omega^2+\omega+1=0,$
$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0,\ \omega^3-1=0,\ \omega^3=1$
$\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0,$
$(\overline{\omega}-1)(\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1)=0,$
$\overline{\omega}^3-1=0,\ \overline{\omega}^3=1$
$$\frac{2\omega^2+3\overline{\omega}}{\omega^{100}+1}=\frac{2\omega^2+3\overline{\omega}}{(\omega^3)^{33}\omega+1}$$
$$=\frac{2\omega^2}{-\omega^2}+\frac{3\overline{\omega}}{-\omega^2}$$
$$=-2+\frac{3\omega\overline{\omega}}{-\omega^3}$$
$$=-2-\frac{3}{1}=-5$$