1. 다음은 조립제법을 이용하여 다항식 $x^3 - 2x^2 + 5x - 3$을 $x - 1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구한 것이다. 몫과 나머지가 바르게 연결된 것은?

① 몫 : $x - 1$, 나머지 : 1

② 몫 : $x - 1$, 나머지 : 4

③ 몫 : $x^2 - x - 4$, 나머지 : 1

④ 몫 : $x^2 - x + 4$, 나머지 : 1

⑤ 몫 : $x^2 - x + 4$, 나머지 : $x - 1$

해설

조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -2 & 5 & -3 \\ & & 1 & -1 & 4 \\ \hline & 1 & -1 & 4 & \boxed{1} \end{array}$$

$\therefore\ x^3 + 2x^2 + 5x - 3 = (x - 1)(x^2 - x + 4) + 1$

따라서 몫은 $x^2 - x + 4$, 나머지는 1

2. x에 대한 이차방정식 $x^2+a(a-1)x+3a=0$의 한 근이 1일 때, 다른 한 근은? (단, a는 상수)

① -1　② -3　③ 0　④ 1　⑤ 3

해설

$x=1$을 대입하면

$1^2+a(a-1)+3a=0$

$a^2+2a+1=(a+1)^2=0$

$\therefore\ a=-1$

$$\begin{aligned} x^2-1\cdot(-2)x-3 &= x^2+2x-3 \\ &= (x+3)(x-1)=0 \end{aligned}$$

$\therefore\ x=1,-3 \quad \therefore\ x=-3$

3. 방정식 $2x^2-6x+3=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=\dfrac{3}{2}$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=9-2\cdot\dfrac{3}{2}=6$

4. 이차함수 $y = 2x^2 + kx - k$ 의 그래프가 x축과 만나도록 하는 상수 k의 값이 아닌 것은?

① -8 ② -1 ③ 0 ④ 5 ⑤ 8

해설

이차방정식 $2x^2 + kx - k = 0$에서 $D = k^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-k) \geq 0$이어야 하므로

$k^2 + 8k \geq 0,\ k(k+8) \geq 0$

$\therefore k \leq -8$ 또는 $k \geq 0$

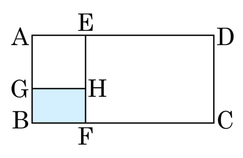
따라서 위의 k의 값의 범위에 속하지 않는 것은 ②이다.

5. 포물선 $y = -x^2 + kx$ 와 직선 $y = x + 1$ 이 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 k 의 범위는?

① $k > 2,\ k < -1$ ② $k > 3,\ k < -1$ ③ $k > 1,\ k < -1$
④ $k > 3,\ k < -2$ ⑤ $k > 3,\ k < -3$

해설
포물선과 직선이 다른 두 점에서 만나므로
$-x^2 + kx = x + 1,\ x^2 + (1 - k)x + 1 = 0$ 에서
$\mathrm{D} = (1 - \mathrm{k})^2 - 4 > 0$
$k^2 - 2k - 3 = (k - 3)(k + 1) > 0$
$\therefore k > 3$ 또는 $k < -1$

6. 다음 그림의 사각형 AGHE, 사각형 EFCD는 정사각형이고, $\overline{AD} = a$, $\overline{AB} = b$일때, 사각형 GBFH의 넓이는?



① $a^2 - 2ab - b^2$　② $a^2 + 3b^2 - 2ab$

③ $-a^2 + 3ab - 2b^2$　④ $-a^2 + 3ab - b^2$

⑤ $-a^2 + 2ab - b^2$

해설

□GBFH = □ABCD − □AGHE − □EFCD

$= ab - (a-b)^2 - b^2 = ab - (a^2 - 2ab + b^2) - b^2$

$= -a^2 + 3ab - 2b^2$

7. 등식 $2x^2-3x-2=a(x-1)(x-2)+bx(x-2)+cx(x-1)$가 x값에 관계없이 항상 성립할 때, 상수 $a+b+c$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

양변에 $x=0$을 대입하면
$-2=2a \quad \therefore\ a=-1$
양변에 $x=1$을 대입하면
$-3=-b \ \therefore\ b=3$
양변에 $x=2$를 대입하면
$0=2c \ \therefore c=0$
$\therefore\ a+b+c=2$

8. x에 대한 다항식 $(4x^2-3x+1)^5$을 전개하였을 때, 모든 계수들(상수항 포함)의 합은?

① 0　　② 16　　③ 32　　④ 64　　⑤ 1024

해설

$(4x^2-3x+1)^5$을 전개하여 x에 대한 내림차순으로 정리하면
$(4x^2-3x+1)^5 = a_0x^{10}+a_1x^9+a_2x^8+\cdots+a_9x+a_{10}$과 같이 된다.
여기서 모든 계수들의 합
$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}$을 구하려면
$x=1$을 대입하면 된다.
즉, $(4-3+1)^5 = a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}$
모든 계수들의 합은 $2^5=32$

9. 등식 $3x^2 + 2x + 1 = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$ 이 x 에 관한 항등식일 때, 상수 b 의 값은?

① 3　　② -4　　③ 2　　④ 8　　⑤ 6

해설

$3x^2 + 2x + 1 = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$
$= (x-1)\left\{a(x-1) + b\right\} + c$

$$\begin{array}{c|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 \\ & & 3 & 5 \\ \hline 1 & 3 & 5 & \boxed{6} \quad \leftarrow \quad \mathrm{c} \\ & & 3 & \\ \hline & 3 & \boxed{8} \ \leftarrow \mathrm{c} & \\ & \uparrow & & \\ & \mathrm{a} & & \end{array}$$

해설

$x = 1$ 을 대입하면 $c = 6$
$3x^2 + 2x + 1 = a(x-1)^2 + b(x-1) + 6$
$\rightarrow 3x^2 + 2x - 5 = a(x-1)^2 + b(x-1)$
$\rightarrow (x-1)(3x+5) = a(x-1)^2 + b(x-1)$
$\rightarrow$ 양변을 $x-1$ 로 나누면
$3x + 5 = a(x-1) + b = ax - a + b$
$\therefore\ a = 3,\ b = 8$
※ 준식의 우변을 모두 전개해서 계수비교하여 구할 수도 있다.

10. 다항식 $8x^3-1$을 $4x^2+2x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 할 때 $Q(x)$의 상수항의 계수는?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$8x^3-1=(2x)^3-1^3=(2x-1)\left(4x^2+2x+1\right)$

$\therefore Q(x)=2x-1$

$\therefore$ 상수항은 -1

11. $a,\ b$가 실수일 때, $(a+2i)(3+4i)+5(1-bi)=0$을 만족하는 $a,\ b$의 값의 합은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$(a+2i)(3+4i)+5(1-bi)=0$에서
$(3a-3)+(4a-5b+6)i=0$
$a,\ b$가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $3a-3=0,\ 4a-5b+6=0$
$\therefore\ a=1,\ b=2$
따라서 $a+b=3$ 이다.

12. x에 대한 이차방정식 $(m+3)x^2-4mx+2m-1=0$이 중근을 갖도록 하는 실수 m의 값의 합은?

① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 중근을 가질 조건은 $D=0$이므로

$\frac{D}{4}=(-2m)^2-(m+3)(2m-1)=0$

$4m^2-(2m^2+5m-3)=0$

$2m^2-5m+3=0$

$(m-1)(2m-3)=0$

$\therefore m=1$ 또는 $\frac{3}{2}$

$\therefore 1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$

13. x에 대한 이차방정식 $x^2+2(a+3)x+a^2+7=0$이 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $a \geq 0$　　② $-1 < a < 0$　　③ $-2 < a < 0$
④ $a \geq -\frac{1}{3}$　　⑤ $0 \leq a \leq \frac{1}{3}$

해설

주어진 이차방정식이 실근을 갖기 위해서는 판별식 $\frac{D}{4} \geq 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4} = (a+3)^2 - (a^2+7) \geq 0$

$a^2+6a+9-a^2-7 \geq 0$

$6a+2 \geq 0 \quad \therefore a \geq -\frac{1}{3}$

14. 사차방정식 $x(x-1)(x+1)(x+2)-8=0$ 의 모든 해의 곱을 구하면?

① -8 ② -2 ③ 1 ④ 4 ⑤ 8

해설

$x(x-1)(x+1)(x+2)-8=0$
$\{x(x+1)\}\{(x-1)(x+2)\}-8=0$
$(x^2+x)(x^2+x-2)-8=0$
$x^2+x=t$ 라 하면, $t(t-2)-8=0$
$\therefore\ t^2-2t-8=x^4+2x^3-x^2-2x-8=0$
근과 계수와의 관계에 의해서, 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ 라 하면 $\therefore$ 모든 해의 곱은 -8

해설

근과 계수의 관계에서 모든 해의 곱을 나타내는 것은 다항식을 전개했을 때의 상수항이므로 -8 (단, 다항식의 최고차항의 차수가 홀수일 때는 상수항의 부호를 반대로 바꾼것이 모든 해의 곱이다.)

15. $x^4-5x^2-14=0$의 두 허근을 α, β라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하면?

① 4　② -4　③ 8　④ -8　⑤ -16

해설

$x^4-5x^2-14=(x^2+2)(x^2-7)=0$이므로
두 허근 α, β는
각각 $\sqrt{2}i$, $-\sqrt{2}i$이므로
$\alpha^2+\beta^2=-2-2=-4$

16. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 - x - 6 \le 0 \\ 4x^2 - 8x + 3 \ge 0 \end{cases}$ 을 풀면?

① $-2 \le x \le \frac{1}{2}$ 또는 $\frac{3}{2} \le x \le 3$
② $-2 \le x \le \frac{1}{2}$ 또는 $2 \le x \le 3$
③ $-2 \le x \le \frac{1}{2}$ 또는 $\frac{3}{2} \le x \le 2$
④ $-2 \le x \le 1$ 또는 $\frac{3}{2} \le x \le 3$
⑤ $-2 \le x \le 1$ 또는 $\frac{3}{2} \le x \le 2$

해설

$\begin{cases} x^2 - x - 6 \le 0 & \cdots ㉠ \\ 4x^2 - 8x + 3 \ge 0 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠ $(x-3)(x+2) \le 0$
$-2 \le x \le 3$
㉡ $(2x-3)(2x-1) \ge 0$
$x \ge \frac{3}{2}, \quad x \le \frac{1}{2}$
㉠과 ㉡의 공통범위 :
$-2 \le x \le \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{2} \le x \le 3$

17. $z \cdot \overline{z} = 1$ 을 만족하는 복소수 $z_1,\ z_2$ 에 대하여 $z_1 + z_2 = 2$ 일 때, $z_1 \cdot z_2$ 의 값은? (단, $\overline{z_1},\ \overline{z_2}$ 는 각각 $z_1,\ z_2$ 의 켤레복소수이다.)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$
($a,\ b,\ c,\ d$ 는 실수)로 놓으면
$\overline{z_1} = a - bi$, $\overline{z_2} = c - di$ 이므로
$z_1 \cdot \overline{z_1} = 1$ 에서
$a^2 + b^2 = 1 \cdots$ ㉠
$z_2 \cdot \overline{z_2} = 1$ 에서
$c^2 + d^2 = 1 \cdots$ ㉡
$z_1 + z_2 = 2$ 에서 $a + c + (b + d)i = 2$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$a + c = 2,\ b + d = 0$
㉠ − ㉡을 하면
$a^2 - c^2 + b^2 - d^2 = 0$
$(a + c)(a - c) + (b + d)(b - d) = 0$
그런데 $b + d$ 는 0이므로 $(a + c)(a - c) = 0$
$\therefore\ a = -c$ 또는 $a = c$
그런데 $a + c = 2$ 이므로 $a = c = 1$
㉠, ㉡에 $a = c$, $c = 1$ 을 각각 대입하면 $d = b = 0$
따라서 $z_1 = 1$, $z_2 = 1$ 이므로
$z_1 \cdot z_2 = 1$

18. 다음 보기 중 옳은 것은 모두 몇 개인가?

㉠ $\sqrt{-2}\sqrt{-5}=\sqrt{10}$	㉡ $\sqrt{-3}\sqrt{12}=-6$
㉢ $(-\sqrt{-2})^2=-2$	㉣ $(\sqrt{-3})^3=-3\sqrt{3}i$
㉤ $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}}=-2i$	㉥ $\dfrac{\sqrt{-8}}{\sqrt{2}}=-2$

① 2 개　② 3 개　③ 4 개　④ 5 개　⑤ 6 개

해설

㉢, ㉣, ㉤이 옳다.

㉠ $\sqrt{-2}\sqrt{-5}=-\sqrt{10}$

㉡ $\sqrt{-3}\sqrt{12}=6i$

㉥ $\dfrac{\sqrt{-8}}{\sqrt{2}}=2i$

19. 두 부등식 $x^2 + 2x - 15 > 0$, $x^2 - x + k \leq 0$에 대하여 두 부등식 중 적어도 하나를 만족하는 x의 값은 실수 전체이고, 두 부등식을 동시에 만족하는 x의 값은 $3 < x \leq 6$일 때, 상수 k 의 값은?

① -48 ② -30 ③ -18 ④ 12 ⑤ 24

해설

부등식 $x^2 + 2x - 15 > 0$ 에서
$(x+5)(x-3) > 0$, $x > 3$ 또는 $x < -5$
부등식 $x^2 - x + k \leq 0$ 에 대하여
두 부등식의 공통범위가 $3 < x \leq 6$ 이므로
$x^2 - x + k \leq 0$ 를 만족하는 범위는
$-5 \leq x \leq 6$ $(x-6)(x+5) \leq 0$
$x^2 - x - 30 \leq 0$
$\therefore k = -30$