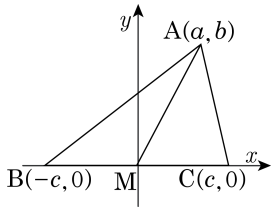


1. 다음은 $\triangle ABC$ 에서 변 BC의 중점을 M이라 할 때, $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$ 을 증명하는 과정이다.



직선 BC를 x 축, 중점 M을 지나고 변 BC에 수직인 직선을 y 축으로 잡고, 세 꼭짓점 A, B, C의 좌표를 각각 $A(a, b)$, $B(-c, 0)$, $C(c, 0)$ 라 하면
 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = (a + c)^2 + b^2 + (a - c)^2 + b^2 = (\text{가})$ 이고,
 $\overline{AM}^2 = a^2 + b^2, \overline{BM}^2 = c^2$
 따라서 $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = (\text{나})$
 $\therefore \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = (\text{다})(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$

위

의 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

- ① $a^2 + b^2 + c^2, a^2 + b^2 + c^2, 1$
 ② $2(a^2 + b^2 + c^2), 2(a^2 + b^2 + c^2), 1$
 ③ $2(a^2 + b^2 + c^2), a^2 + b^2 + c^2, 2$
 ④ $2(a^2 + b^2 + c^2), 2(a^2 + b^2 + c^2), 2$
 ⑤ $3(a^2 + b^2 + c^2), a^2 + b^2 + c^2, 3$

해설

$A(a, b)$, $B(-c, 0)$, $C(c, 0)$ 이므로
 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$
 $= \{(-c - a)^2 + (0 - b)^2\} + \{(c - a)^2 + (0 - b)^2\}$
 $= (c^2 + 2ca + a^2 + b^2) + (c^2 - 2ca + a^2 + b^2)$
 $= 2(a^2 + b^2 + c^2)$
 $\overline{AM}^2 = a^2 + b^2, \overline{BM}^2 = c^2$ 이므로
 $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = a^2 + b^2 + c^2$
 $\therefore \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$

2. 두 점 $A(-2, -1), B(1, 3)$ 을 잇는 선분 AB 를 $3 : 1$ 로 외분하는 점 Q 의 좌표는?

① $(5, -1)$

② $\left(\frac{5}{2}, 5\right)$

③ $\left(-3, \frac{5}{2}\right)$

④ $\left(\frac{2}{3}, -1\right)$

⑤ $(3, 1)$

해설

$$\left(\frac{3+2}{3-1}, \frac{9+1}{3-1}\right) = \left(\frac{5}{2}, 5\right)$$

3. $A(a, 8)$, $B(b, a)$, $C(5, b)$ 인 $\triangle ABC$ 의 무게중심이 $G(a, 3)$ 일 때, 선분 BG 의 길이는?

① 2 ② $\sqrt{10}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{34}$

해설

$$\frac{a+b+5}{3} = a, \frac{8+a+b}{3} = 3$$

$$\therefore a = 2, b = -1$$

$$\text{따라서 } \overline{BG} = \sqrt{(2+1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{10}$$

4. 두 점 A(4, -3), B(a, 3) 사이의 거리가 $6\sqrt{2}$ 일 때, 양수 a 의 값은?

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

두 점 A(4, -3), B(a, 3) 에 대하여

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{(a-4)^2 + (3+3)^2} \\ &= \sqrt{a^2 - 8a + 52} \\ &= 6\sqrt{2}\end{aligned}$$

위의 식의 양변을 제곱하면 $a^2 - 8a + 52 = 72$

$$a^2 - 8a - 20 = 0$$

$$(a-10)(a+2) = 0$$

$$\therefore a = 10 (\because a > 0)$$

5. 좌표평면 위의 세 점 A(2, 0), B(3, a), C(4, 2)에 대하여 $\overline{AB} = \overline{BC}$ 일 때, a 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}\overline{AB} = \overline{BC} &\text{에서 } \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 \text{ 이므로} \\ (3-2)^2 + (a-0)^2 &= (4-3)^2 + (2-a)^2 \\ 1 + a^2 &= 1 + 4 - 4a + a^2 \\ 4a &= 4 \quad \therefore a = 1\end{aligned}$$

6. 수직선 위의 세 점 A(1), B(7), C(10) 과 동점 $P(x)$ 에 대하여 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 이 최소가 되는 점 P 의 좌표를 구하면?
- ① P(5) ② P(6) ③ P(7) ④ P(8) ⑤ P(9)

해설

$$\begin{aligned} &\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 \\ &= (x-1)^2 + (x-7)^2 + (x-10)^2 \\ &= 3(x-6)^2 + 42 \end{aligned}$$

따라서, $x = 6$ 일 때 최소가 된다.

7. 세 점 A(0,0), B(1,0), C(1,2)에 대하여 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 이 최소가 되도록 점 P의 좌표를 정하면?

- ① $P\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ ② $P\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)$ ③ $P\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$
④ $P\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ⑤ $P\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

해설

$$\begin{aligned} &P(x, y) \text{ 라 두면} \\ &x^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 + (x-1)^2 + (y-2)^2 \\ &= 3x^2 - 4x + 3y^2 - 4y + 6 \\ &= 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + 3\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{10}{3} \end{aligned}$$

∴ $P\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 일 때 최소

※ 점 P 는 $\triangle ABC$ 의 무게중심이 된다.

$$\left(\frac{0+1+1}{3}, \frac{0+0+2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

8. 세 점 A(6, 2) B(0, -6), C(7, -5)를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 외심의 좌표를 (a, b) 라 할 때, $3ab$ 의 값을 구하면?

- ① -24
- ② -18
- ③ -12
- ④ 9
- ⑤ 21

해설

$\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{AB}^2$ 이므로 $\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.
 $\therefore$ 빗변 $\overline{AB}$ 의 중점이 외심이다.
 $\left(\frac{6+0}{2}, \frac{2+(-6)}{2}\right) = (3, -2)$
 $\therefore 3ab = -18$

9. x, y 가 실수일 때, $\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2} + \sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}$ 의
최솟값은?

- ① $\sqrt{5}$
- ② $2\sqrt{5}$
- ③ $\sqrt{6}$
- ④ $2\sqrt{6}$
- ⑤ 5

해설

다음 그림에서

$\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}$

$\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}$

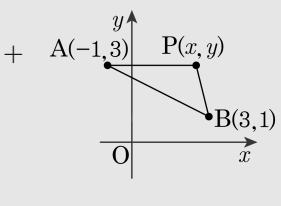
= $\overline{AP} + \overline{BP}$ 를 의미 하므로

$\overline{AP} + \overline{BP} \geq \overline{AB}$

그러므로 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은

$\overline{AB} = \sqrt{(3+1)^2+(1-3)^2} = 2\sqrt{5}$

+



10. 길이 3인 선분 AB의 양 끝점 A, B가 각각 x 축, y 축 위를 움직일 때, 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점 P의 자취를 구하면?

- ① $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ ② $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ ③ $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$
④ $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ ⑤ $x^2 + 3y^2 = 6$

해설

A(a , 0), B(0, b), P(x , y)라 하면

$\overline{AB} = 3$ 이므로 $\sqrt{a^2 + b^2} = 3$

$a^2 + b^2 = 9 \cdots \textcircled{1}$

P(x , y)는 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점이므로 $x = \frac{a}{3}$, $y = \frac{2b}{3}$

$\therefore a = 3x$, $b = \frac{3y}{2} \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{2}$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $9x^2 + \frac{9}{4}y^2 = 9$

$\therefore x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$