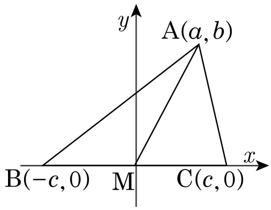
1. 다음은 $\triangle$ABC 에서 변 BC의 중점을 M이라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=2(\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2)$을 증명하는 과정이다.



> 직선 BC를 x축, 중점 M을 지나고 변 BC에 수직인 직선을 y축으로 잡고, 세 꼭짓점 A, B, C의 좌표를 각각
> A(a,b), B$(-c,0)$, C$(c,0)$ 라 하면
> $\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=(a+c)^2+b^2+(a-c)^2+b^2=$(가) 이고,
> $\overline{\mathrm{AM}}^2=a^2+b^2, \overline{\mathrm{BM}}^2=c^2$
> 따라서 $\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2=$(나)
> $\therefore \overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=$(다)$(\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2)$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① $a^2+b^2+c^2, a^2+b^2+c^2, 1$

② $2(a^2+b^2+c^2), 2(a^2+b^2+c^2), 1$

③ $2(a^2+b^2+c^2), a^2+b^2+c^2, 2$

④ $2(a^2+b^2+c^2), 2(a^2+b^2+c^2), 2$

⑤ $3(a^2+b^2+c^2), a^2+b^2+c^2, 3$

해설

A(a,b), B$(-c,0)$, C$(c,0)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2$

$=\{(-c-a)^2+(0-b)^2\}+\{(c-a)^2+(0-b)^2\}$

$=(c^2+2ca+a^2+b^2)+(c^2-2ca+a^2+b^2)$

$=2(a^2+b^2+c^2)$

$\overline{\mathrm{AM}}^2=a^2+b^2, \overline{\mathrm{BM}}^2=c^2$ 이므로

$\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2=a^2+b^2+c^2$

$\therefore \overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=2\,(\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2)$

2. 두 점 $A(-2, -1)$, $B(1, 3)$을 잇는 선분 AB를 $3 : 1$로 외분하는 점 Q의 좌표는?

① $(5, -1)$　② $\left(\frac{5}{2}, 5\right)$　③ $\left(-3, \frac{5}{2}\right)$

④ $\left(\frac{2}{3}, -1\right)$　⑤ $(3, 1)$

해설

$$\left(\frac{3+2}{3-1}, \frac{9+1}{3-1}\right) = \left(\frac{5}{2}, 5\right)$$

3. $A(a,\ 8)$, $B(b,\ a)$, $C(5,\ b)$ 인 $\triangle ABC$ 의 무게중심이 $G(a,\ 3)$ 일 때, 선분 BG 의 길이는?

① 2 ② $\sqrt{10}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{34}$

해설

$$\frac{a+b+5}{3}=a \quad , \quad \frac{8+a+b}{3}=3$$

$\therefore a=2 \quad , b=-1$

따라서 $\overline{BG}=\sqrt{(2+1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{10}$

4. 두 점 $\mathrm{A}(4,-3), \mathrm{B}(a, 3)$ 사이의 거리가 $6\sqrt{2}$ 일 때, 양수 a 의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

두 점 $\mathrm{A}(4,-3), \mathrm{B}(a, 3)$ 에 대하여

$$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(a-4)^2+(3+3)^2}$$
$$= \sqrt{a^2-8a+52}$$
$$= 6\sqrt{2}$$

위의 식의 양변을 제곱하면 $a^2-8a+52=72$

$a^2-8a-20=0$

$(a-10)(a+2)=0$

$\therefore a=10(\because a>0)$

5. 좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{A}(2,\ 0)$, $\mathrm{B}(3,\ a)$, $\mathrm{C}(4,\ 2)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{BC}}$일 때, a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

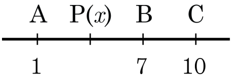
$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{BC}}$에서 $\overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{BC}}^2$이므로

$(3-2)^2 + (a-0)^2 = (4-3)^2 + (2-a)^2$

$1 + a^2 = 1 + 4 - 4a + a^2$

$4a = 4 \qquad \therefore a = 1$

6. 수직선 위의 세 점 A(1), B(7), C(10) 과 동점 P(x) 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2 + \overline{\mathrm{CP}}^2$ 이 최소가 되는 점 P 의 좌표를 구하면?



① P(5)　② P(6)　③ P(7)　④ P(8)　⑤ P(9)

해설

$\overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2 + \overline{\mathrm{CP}}^2$

$= (x-1)^2 + (x-7)^2 + (x-10)^2$

$= 3(x-6)^2 + 42$

따라서, $x = 6$ 일 때 최소가 된다.

7. 세 점 A$(0, 0)$, B$(1, 0)$, C$(1, 2)$에 대하여 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 이 최소가 되도록 점 P의 좌표를 정하면?

① $P\left(-\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$ ② $P\left(\frac{1}{2},\ -\frac{2}{3}\right)$ ③ $P\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$
④ $P\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$ ⑤ $P\left(-\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$

해설

$P(x,\ y)$ 라 두면

$x^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 + (x-1)^2 + (y-2)^2$

$= 3x^2 - 4x + 3y^2 - 4y + 6$

$= 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + 3\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{10}{3}$

$\therefore P\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$ 일 때 최소

※ 점 P 는 $\triangle$ABC 의 무게중심이 된다.

$\left(\frac{0+1+1}{3},\ \frac{0+0+2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$

8. 세 점 $A(6,2)$ $B(0,-6)$, $C(7,-5)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 외심의 좌표를 (a,b) 라 할 때, $3ab$ 의 값을 구하면?

① -24 ② -18 ③ -12 ④ 9 ⑤ 21

해설

$\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{AB}^2$ 이므로 $\angle C = 90°$ 인 직각삼각형이다.

$\therefore$ 빗변 $\overline{AB}$ 의 중점이 외심이다.

$$\left(\frac{6+0}{2}, \frac{2+(-6)}{2}\right) = (3,-2)$$

$\therefore\ 3ab = -18$

9. x, y가 실수일 때, $\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}$의 최솟값은?

① $\sqrt{5}$　② $2\sqrt{5}$　③ $\sqrt{6}$　④ $2\sqrt{6}$　⑤ 5

해설

다음 그림에서

$\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}$ $+$

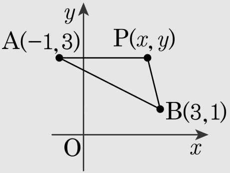
$\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}$

$=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$를 의미 하므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}} \geq \overline{\mathrm{AB}}$

그러므로 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(3+1)^2+(1-3)^2}=2\sqrt{5}$



10. 길이 3인 선분 AB의 양 끝점 A, B가 각각 x축, y축 위를 움직일 때, 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점 P의 자취를 구하면?

① $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ ② $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$ ③ $\frac{x^2}{4}+y^2=1$

④ $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ ⑤ $x^2+3y^2=6$

해설

A$(a,\ 0)$, B$(0,\ b)$, P$(x,\ y)$라 하면

$\overline{\mathrm{AB}}=3$이므로 $\sqrt{a^2+b^2}=3$

$a^2+b^2=9\cdots$ ㉠

P$(x,\ y)$는 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점이므로 $x=\frac{a}{3}$, $y=\frac{2b}{3}$

$\therefore a=3x,\ b=\frac{3y}{2}\cdots$ ㉡

㉡를 ㉠에 대입하면 $9x^2+\frac{9}{4}y^2=9$

$\therefore x^2+\frac{y^2}{4}=1$