1. 다음 중 소인수분해한 것으로 옳은 것은?

① $28 = 2^2 \times 7^2$ ② $140 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

③ $80 = 2^3 \times 10$ ④ $63 = 3^2 \times 7$

⑤ $200 = 4 \times 10^2$

해설

① $2^2 \times 7$

② $2^2 \times 5 \times 7$

③ $2^4 \times 5$

⑤ $2^3 \times 5^2$

2. 다음 보기 중 6 과 서로소인 수를 모두 찾아라.

보기

3, 9, 11, 12, 15, 17, 25

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 11

▷ 정답: 17

▷ 정답: 25

해설

$6 = 2 \times 3$ 이므로 소인수로 2 와 3 을 갖지 않는 것을 찾는다.
11, 17 은 소수이며, $25 = 5^2$ 이므로 답은 11 , 17 , 25 이다.

3. 두 수 $2^a \times 3 \times 5,\ 2 \times 5^b \times 7^c$ 의 최소공배수를 구하면 $2 \times 3 \times 5^2 \times 7^2$ 이다. $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$2^a = 2$ 이므로 $a = 1$
$5^b = 5^2$ 이므로 $b = 2$
$7^c = 7^2$ 이므로 $c = 2$ 따라서 $a+b+c = 5$

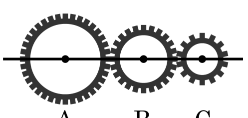
4. 두 자연수의 최소공배수가 14 일 때, 두 자연수의 공배수를 나타낸 것은?

① $1, 3, 7, 21$
② $4, 16, 64, \cdots$
③ $14, 28, 42, 56, \cdots$
④ $2, 4, 8, 16, 32, \cdots$
⑤ $14, 28, 42$

해설

공배수는 최소공배수의 배수이므로, 두 자연수의 공배수는 14 의 배수이다.

5. 다음 그림과 같이 서로 맞물려 돌아가는 세 톱니바퀴 A, B, C 의 톱니의 수는 각각 36 개, 24 개, 14 개이다.
세 톱니바퀴가 돌아 원래 모양이 되려면 톱니바퀴 A 는 몇 번 회전해야 하는지 구하여라.



▶ 답 : 번

▷ 정답 : 14번

해설
세 톱니바퀴가 원래 모양이 되기까지 돌아간 톱니의 개수는 36, 24, 14 의 최소공배수인 504 개이므로, 톱니바퀴 A 는 $504 \div 36 = 14$(번) 회전해야 한다.

6. 두 분수 $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{6}$ 중 어느 것을 곱해도 자연수가 되는 수 중 두 번째로 큰 자연수는?

① 16 ② 32 ③ 48 ④ 96 ⑤ 114

해설

구하는 수는 16 과 6 의 공배수이다.
16 와 6 의 공배수는 16 와 6 의 최소공배수인 48 의 배수이므로 48, 96, 144, $\cdots$ 이다.

7. 옛날부터 우리나라에는 십간(☒☒)과 십이지(☒☒☒)를 이용하여 매 해에 이름을 붙였다. 십간과 십이지를 차례대로 짝지으면 다음과 같이 그 해의 이름을 만들 수 있다. 다음 표에서 알 수 있듯이 2010 년은 경인년이다. 다음 중 경인년이 <u>아닌</u> 해는?

병	정	무	기	경	신	임	계
자	축	인	묘	진	사	오	미
병자	정축	무인	기묘	경진	신사	임오	계미
1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003

갑	을	병	정	무	기	경
신	유	술	해	자	축	인
갑신	을유	병술	정해	무자	기축	경인
2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010

① 1830 년 ② 1890 년 ③ 1950 년

④ 2070 년 ⑤ 2110 년

해설

십간(☒☒)의 10 가지와 십이지(☒☒☒)의 12 가지를 계속 돌아가면서 조합이 이루어지므로 같은 이름의 년도는 60 년 만에 한 번씩 돌아오게 된다. 따라서 2010 년이 경인년이면 1830 년, 1890 년, 1950 년, 2070 년도 경인년이다.

8. $24 \times a$ 가 어떤 자연수 A 의 제곱이 될 때, A 의 최솟값은?

① 9 ② 12 ③ 36 ④ 54 ⑤ 100

해설

$24 \times a = 2^3 \times 3 \times a$
가장 작은 $a = 2 \times 3 = 6$
$A^2 = 2^3 \times 3 \times 2 \times 3 = 2^4 \times 3^2 = (12)^2$
$\therefore A = 12$

9. 61 을 나누면 5 가 남고 165 를 나누면 3 이 부족한 수가 아닌 것은?

① 4 ② 7 ③ 14 ④ 28 ⑤ 56

해설

56 과 168 의 최대공약수는 56
56 약수 중 나머지 5 보다 큰 수들은
7, 8, 14, 28, 56 이다.

10. 가로의 길이와 세로의 길이, 높이가 각각 4cm, 12cm, 8cm 인 직육면체 모양의 나무토막이 여러 개 있다. 이것을 빈틈없이 쌓아서 될 수 있는 대로 가장 작은 정육면체 모양을 만들려고 할 때, 필요한 나무토막의 개수는?

① 24 개　② 36 개　③ 48 개　④ 60 개　⑤ 72 개

해설

4, 12, 8 의 최소공배수는 24 이므로
(필요한 나무토막의 개수)
$= (24 \div 4) \times (24 \div 12) \times (24 \div 8)$
$= 6 \times 2 \times 3 = 36$(개)

11. 어떤 수를 5, 8, 10 으로 나누었더니 나머지가 각각 2, 5, 7 이었다. 어떤 수가 두 자리의 자연수일 때, 어떤 수가 될 수 있는 수들의 합을 구하여라.

① 110 ② 111 ③ 112 ④ 113 ⑤ 114

해설

어떤 수를 x라 하면 $x+3$ 은 5, 8, 10 의 공배수이고 , 세 수의 최소공배수는 40 이다.
따라서 $x+3$ 은 40 의 배수 중 두 자리의 자연수이므로 $x+3=40$, $x+3=80$ 이다.
$x=37, 77$ 이다. 따라서 $37+77=114$ 이다.

12. 세 수 $3\times5^2,\ c^3\times3^a\times5^2,\ 2\times3\times5^b\times7$ 의 최대공약수가 $d\times5$ 이고, 최소공배수가 $2^3\times3^2\times5^2\times7$ 일 때, $\dfrac{d}{c}-\dfrac{b}{a}$ 의 값을 구하면?

① 0　　② 1　　③ 5　　④ 9　　⑤ 12

해설

최대공약수가 $d\times5$,
최소공배수가 $2^3\times3^2\times5^2\times7$ 이므로
$a=2,\ b=1,\ c=2,\ d=3$
$\therefore\ \dfrac{d}{c}-\dfrac{b}{a}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}=1$

13. 두 자연수 $A,\ B$ 에서 $A \times B$ 의 값이 1440 이고, 최대공약수가 12 일 때, 차가 가장 작은 두 자연수의 합은?

① 11 ② 36 ③ 72 ④ 84 ⑤ 108

해설

최소공배수를 L 이라 하면 $1440 = 12 \times L$ 이므로 $L = 120$

$$\begin{array}{r|cc} 12 & A & B \\ \hline & a & b \end{array}$$

$12 \times a \times b = 120$

$a \times b = 10$ (단, $a,\ b$ 는 서로소)

$A = 12 \times a,\ B = 12 \times b$ 이고 $A > B$ 라 하면

$a = 10,\ b = 1$ 또는 $a = 5,\ b = 2$

(i) $a = 10,\ b = 1$ 일 때

$A - B = 10 \times 12 - 1 \times 12 = 108$

(ii) $a = 5,\ b = 2$ 일 때

$A - B = 5 \times 12 - 2 \times 12 = 36$

따라서, 차가 가장 작은 두 자연수는 60, 24 이다.

14. 여섯 자리의 수 3124$\boxed{}$8 은 3 의 배수이면서 4 의 배수이다. $\boxed{}$안에 알맞은 숫자를 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

▷ 정답 : 6

해설

3 의 배수이면서 4 의 배수인 수는 312408 , 312468 이다.

15. 1 부터 100 까지의 자연수를 모두 곱하면 $A \times (2 \times 5)^n$ 이 될 때, n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 100$ 에서 2 의 배수의 개수 : 50 개
2^2 의 배수의 개수 : 25 개
2^3 의 배수의 개수 : 12 개
2^4 의 배수의 개수 : 6 개
2^5 의 배수의 개수 : 3 개
2^6 의 배수의 개수 : 1 개이고,
5 의 배수의 개수 : 20 개
5^2 의 배수의 개수 : 4 개이므로

$$\begin{aligned} \therefore 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 100 &= 2^{97} \times 5^{24} \times \cdots \\ &= A \times (2 \times 5)^{24} \end{aligned}$$

$\therefore\ n = 24$

16. 120^9 은 2800 개의 서로 다른 약수를 가지고 있다. 이 약수 중 제곱수는 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 : ________ 개

▷ 정답 : 350 개

해설

120 을 소인수분해하면 $120 = 2^3 \times 3 \times 5$ 이므로 $120^9 = (2^3 \times 3 \times 5)^9 = 2^{27} \times 3^9 \times 5^9$ 이다. 따라서 120^9 의 약수의 개수는 $(27+1) \times (9+1) \times (9+1) = 2800$ 개이고,
이 중 제곱수는 지수가 모두 짝수로 이루어져 있어야 한다.
따라서 제곱수는 $2^0, 2^2, \cdots, 2^{26}$ 인 14 개, $3^0, 3^2, \cdots, 3^8$ 인 5 개, $5^0, 5^2, \cdots, 5^8$ 인 5개이므로 120^9 의 약수 중 제곱수는 $14 \times 5 \times 5 = 350$ 이다.

17. 서로 다른 한 자리 소수 $a,\ b,\ c$ 에 대하여 $a^l \times b^m \times c^n$ 으로 소인수분해되는 자연수 N 에 3 을 곱하였더니 약수의 개수가 2 배가 되었다. 이때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$a,\ b,\ c$ 중 3이 있는 경우

$a=3$ 이라 하면

$2(l+1)(m+1)(n+1)=(l+2)(m+1)(n+1)$

$2l+2=l+2,\ l=0$

$l,\ m,\ n$ 은 1 이상인 자연수이므로 $a,\ b,\ c$ 중에 3은 없다.

$a,\ b,\ c$ 는 한 자리 소수 2, 3, 5, 7 중에서 3이 아니므로 2, 5, 7 이다.

$\therefore\ 2+5+7=14$

18. a가 자연수일 때, $f(a)$ 는 a 의 약수의 개수를 나타낸다고 정의한다. x는 1 이상 100 이하이고, $f(x) = 3$ 일 때, x의 개수를 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 4 개

해설

$f(x) = 3$ 에서 약수의 개수가 3 개인 수는
$(\text{소수})^2$ 이므로
100 이하의 수 중 소수의 제곱이 되는 수는
$2^2, 3^2, 5^2, 7^2$ 의 4 개

19. 18과 a의 공약수가 1, 2, 3, 6일 때, a가 될 수 있는 50보다 작은 자연수는 모두 몇 개인가?

① 4 개 ② 5 개 ③ 6 개 ④ 7 개 ⑤ 8 개

해설

18 과 a 의 최대공약수가 6 이므로
$18 = 6 \times 3$, $a = 6 \times k$
k 는 3 의 배수이면 안 된다.
따라서 50 보다 작은 자연수 a 는
$6 \times 1 = 6$, $6 \times 2 = 12$, $6 \times 4 = 24$, $6 \times 5 = 30$, $6 \times 7 = 42$,
$6 \times 8 = 48$ 의 6 개이다.

20. 두 자연수 A ,B 의 최대공약수를 $[A, B]$ 로 나타낼 때, $[A, B] = [C, D] = k$ 이다. 다음을 간단히 하여라. (단, A 와 C, D, B 와 C, D 는 서로소)

$$[\frac{[AB, CD]}{[A+B, C+D]}, \frac{[AD, BC]}{[A+D, B+C]}]$$

▶ 답 :

▷ 정답 : k

해설

$[A, B] = [C, D] = k \rightarrow A, B, C, D$ 모두 인수 k 를 가진다.
AB 와 CD, AD 와 BC 는 모두 인수 k^2 을 가지고,
$(A+B)$ 와 $(C+D)$, $(A+D)$ 와 $(B+C)$ 는 모두 인수 k 를 가진다.

$$\therefore [\frac{[AB, CD]}{[A+B, C+D]}, \frac{[AD, BC]}{[A+D, B+C]}] = [\frac{k^2}{k}, \frac{k^2}{k}] = [k, k] = k$$