1. $|x-y|+(y-2)i=5x-2-3xi$를 만족하는 실수를 $x,\ y$라 할 때, $\frac{x}{y}$의 값은? (단, $i^2=-1$)

① $\frac{3}{2}$　② $\frac{2}{3}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{3}{4}$

해설

(i) $x \geq y$일 때,

$(x-y)+(y-2)i=5x-2-3xi$

$x-y=5x-2,\quad y-2=-3x$

$\therefore\ x=0,\ y=2$($x<y$이므로 부적합)

(ii) $x<y$일 때.

$-(x-y)+(y-2)i=5x-2-3xi$

$-x+y=5x-2,\ y-2=-3x$

$\therefore\ x=\frac{4}{9},\ y=\frac{2}{3}$

$\therefore\ \frac{x}{y}=\frac{4}{9}\times\frac{3}{2}=\frac{2}{3}$

2. $\alpha,\ \beta$ 가 복소수일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $\overline{\alpha},\ \overline{\beta}$ 는 각각 $\alpha,\ \beta$ 의 켤레복소수이고 $i = \sqrt{-1}$)

㉠ $\alpha = \overline{\beta}$ 이면, $\alpha + \beta,\ \alpha\beta$ 는 모두 실수이다.
㉡ $\alpha = \overline{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 이다.
㉢ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 이고 $\beta = 0$ 이다.
㉣ $\alpha + \beta i = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 이고 $\beta = 0$ 이다.

① ㉡,㉢ ② ㉠,㉡,㉢ ③ ㉠,㉡,㉣
④ ㉠,㉡ ⑤ ㉠,㉡,㉢,㉣

해설

$\alpha = a + bi,\ \beta = a - bi$ ($a,\ b$ 는 실수)
㉠ $\alpha + \beta = 2a,\ \alpha\beta = a^2 + b^2$
㉡ $\alpha\beta = 0$, $a^2 + b^2 = 0$, $a = 0,\ b = 0$
㉢ (반례) $\alpha = 1,\ \beta = i$
㉣ (반례) $\alpha = 1,\ \beta = i$

3. 복소수 z의 켤레복소수를 $\bar{z}$라 할 때, $(1+2i)z+5(1-\bar{z}i)=0$ 을 만족시키는 복소수 z는?

① $1+3i$　② $1-3i$　③ $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$
④ $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}i$　⑤ $\frac{1}{4}-\frac{3}{4}i$

해설

$z=a+bi$ (a, b 는 실수)라 놓으면 $\bar{z}=a-bi$
따라서, 준식은 $(1+2i)(a+bi)+5\{1-(a-bi)i\}=0$
$\therefore\ a-7b+5+(b-3a)i=0$
그런데, a, b가 실수이므로
$a-7b+5=0,\ b-3a=0$
이들을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{4},\ b=\frac{3}{4}$
$\therefore\ z=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}i$

4. x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $-1+\sqrt{2}$일 때, 유리수 a, b의 값을 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $a=2$

▷ 정답: $b=-1$

해설

$x^2+ax+b=0$에 $x=-1+\sqrt{2}$를 대입하여 정리하면

$3-2\sqrt{2}+a(-1+\sqrt{2})+b=0$

$-a+b+3+(a-2)\sqrt{2}=0$

$-a+b+3=0$과 $a-2=0$에서 $a=2,\ b=-1$

5. $x^2 - 2x + 3 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $(\alpha^2 - 2\alpha)(\beta^2 - 2\beta)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$x^2 - 2x + 3 = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의해
$\alpha + \beta = 2,\ \alpha\beta = 3$
$(\alpha^2 - 2\alpha)(\beta^2 - 2\beta)$
$= \alpha^2\beta^2 - 2\alpha^2\beta - 2\alpha\beta^2 + 4\alpha\beta$
$= (\alpha\beta)^2 - 2\alpha\beta(\alpha + \beta) + 4\alpha\beta$
$= 9 - 6 \cdot 2 + 12 = 9$

6. x에 관한 이차방정식 $x^2+2(m+a-2)x+m^2+a^2-3b=0$이 m에 관계없이 항상 중근을 가질 때, $a+3b$의 값은?

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

$x^2+2\cdot(m+a-2)x+(m^2+a^2-3b)=0$

중근을 가지려면 $\frac{D}{4}=0$

$(m+a-2)^2-1\cdot(m^2+a^2-3b)=0$

m에 대한 항등식이므로

정리해서 m으로 묶으면,

$m\cdot(2a-4)+(4-4a+3b)=0$

$a=2, 3b=4a-4=4$

$\therefore\ a+3b=6$

7. 이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 두 근을 α,β라 한다. $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$을 두 근으로 하고, x^2의 계수가 1인 이차방정식이 $x^2+ax+b=0$일 때, $a-b$의 값을 구하시오.

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 5

해설

$x^2-2x-1=0$의 두 근이 α,β이므로 근과계수와의 관계로부터
$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-1$
2와 -1을 두 근으로 하는 이차방정식은
$x^2-(2-1)x+2\cdot(-1)=0$
$x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x^2+ax+b=0$
$\therefore\ a=-1,\ b=-2$

8. 종섭이와 성제가 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 을 각각 풀었다. 종섭이는 x 의 계수를 잘못 봐서 $3-2i,\ 3+2i$ 라는 근을 구했고, 성제는 상수항을 잘못 봐서 $2-i,\ 2+i$ 라는 근을 구했을 때, $\left|\frac{bc}{a^2}\right|$ 의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

종섭이는 x의 계수를 잘못 보았으므로 상수항은 참이다.
두 근의 곱 $=\frac{c}{a}=(3-2i)(3+2i)=9+4=13$

성제는 상수항을 잘못 보았으므로 x의 계수는 참이다.

두 근의 합$=-\frac{b}{a}=2-i+2+i=4$

$\therefore \left|\frac{bc}{a^2}\right|=\left|\frac{b}{a}\times\frac{c}{a}\right|=|-4\times 13|=|-52|=52$

9. 원점을 지나고 이차함수 $f(x)=x^2+ax+2b$에 접하는 두 개의 직선이 서로 직교할 때, 점 $(a,\ b)$의 자취를 나타내는 방정식은? (단, $b>0$ 이다.)

① $b=\frac{1}{2}(a+1)$　② $b=\frac{1}{8}(a^2+1)$　③ $b=\frac{1}{4}a^2$

④ $b=\frac{1}{6}(a-3)^2$　⑤ $b=\frac{1}{12}a^2-4$

해설

원점을 지나는 직선 $y=mx$라 두면,

$x^2+ax+2b=mx$

$x^2+(a-m)x+2b=0$

$$D=(a-m)^2-8b=0$$
$$=m^2-2am+a^2-8b=0$$

두 직선이 직교할 때, 기울기의 곱은 -1 이므로,
근과 계수의 관계에서

$a^2-8b=-1$

$\therefore\ b=\frac{1}{8}(a^2+1)$

10. 이차함수 $y = x^2 + 6x - 5$ 의 최솟값을 m, $y = -x^2 - 6x - 5$ 의 최댓값을 M 이라 했을 때, $M + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -10

해설

$y = x^2 + 6x - 5$
$= (x + 3)^2 - 14$
따라서 최솟값은 $m = -14$
$y = -x^2 - 6x - 5$
$= -(x + 3)^2 + 4$
따라서 최댓값은 $M = 4$
$\therefore M + m = 4 + (-14) = -10$

11. 지면으로부터 15m 높이에서 초속 40m 로 쏘아 올린 모형 로켓의 x 초 후의 지면으로 부터의 높이를 ym 라고 하면 $y = -5x^2 + 40x + 15$ 인 관계가 성립한다. 이 로켓이 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간과 그 때의 높이를 구하여라.

▶ 답: ______ 초

▶ 답: ______ m

▷ 정답: 4 초

▷ 정답: 95 m

해설

$y = -5x^2 + 40x + 15$ 에서 $y = -5(x-4)^2 + 95$ 이다.
따라서 $x = 4$ 일 때, y 는 최댓값 95 를 갖는다.

12. x에 대한 부등식 $ax + b < 0$의 해가 $x > -1$일 때, 부등식 $(a+b)x + 3a - b > 0$의 해를 구하면?

① $x > -1$ ② $x < -1$ ③ $x > -3$

④ $x < -3$ ⑤ $x < 5$

해설

$ax + b < 0$

$ax < -b$

해가 $x > -1$이므로 $a < 0$

$x > -\frac{b}{a}$

$\Rightarrow \quad -\frac{b}{a} = -1 \quad \Rightarrow \quad a = b$

$(a+b)x + 3a - b > 0$

$2ax + 2a > 0$

$2ax > -2a$

$x < -1$ ($\because$ $a < 0$)

13. 연립부등식 $\begin{cases} x-4>5 \\ 3x-2<a \end{cases}$ 의 해가 $9<x<14$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 40

해설

$x-4>5$

$x>9$

$3x-2<a$

$3x<a+2$

$x<\dfrac{a+2}{3}$

$9<x<\dfrac{a+2}{3}$ 가 $9<x<14$ 이므로

$\dfrac{a+2}{3}=14$

$a+2=42$

$\therefore\ a=40$

14. 다음 연립부등식의 해가 없을 때, a 의 값의 범위를 구하여라.

$$\begin{cases} 3x-8<5x+2 \\ 2x-3 \leq x+a \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $a \leq -8$

해설

$3x-5x<2+8$

$-2x<10$ 에서

$x>-5$

$2x-x \leq a+3$ 에서

$x \leq a+3$

$a+3 \leq -5$ 이어야 해가 없다.

$\therefore\ a \leq -8$

15. 모든 실수 x에 대하여 $x^2-2mx-m \geq 0$을 만족하는 실수 m의 범위는 $a \leq m \leq b$이다. $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a+b=-1$

해설

$x^2-2mx-m \geq 0$이
항상 성립하려면 판별식 $D \leq 0$

$\frac{D}{4}=m^2+m \leq 0$

$m(m+1) \leq 0$, $-1 \leq m \leq 0$

$\therefore\ a+b=(-1)+0=-1$

16. 두 실수 x, y 가 $x^2+y^2+2x-2y-2=0$ 을 만족할 때, x 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$x^2+y^2+2x-2y-2=0$ 을 y 에 대한 식으로 정리하면

$y^2-2y+\left(x^2+2x-2\right)=0$

x, y 는 실수이므로 이 이차방정식은 실근을 갖는다.

$\frac{D}{4}=(-1)^2-\left(x^2+2x-2\right)\geq 0$

$x^2+2x-3\leq 0$, $(x+3)(x-1)\leq 0$

$\therefore -3\leq x\leq 1$, x 의 최댓값은 1 , 최솟값은 -3

따라서, 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 -2

17. 삼차방정식 $x^3+(2a+3)x^2-(6a+5)x+(4a+1)=0$이 중근을 가질 때, 상수 a의 값을 구하면?

① $a=2,\ -4\pm\sqrt{11}$　② $a=-2,\ -2\pm\sqrt{10}$
③ $a=3,\ -3\pm\sqrt{5}$　④ $a=1,\ 4\pm\sqrt{10}$
⑤ $a=-1,\ -2\pm2\sqrt{2}$

해설

$f(x)=x^3+(2a+3)x^2-(6a+5)x+4a+1$이라 하면
$f(1)=0$이므로 $f(x)$는 $(x-1)$을 인수로 갖는다.

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 2a+3 & -6a-5 & 4a+1 \\ & & 1 & 2a+4 & -4a-1 \\ \hline & 1 & 2a+4 & -4a-1 & \boxed{0} \end{array}$$

조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면
$(x-1)\left\{x^2+2(a+2)x-4a-1\right\}=0$
(i) $x^2+2(a+2)x-4a-1=0$이 $x\neq1$인 경우
$D=0$이므로, $a^2+8a+5=0$
$\therefore\ a=-4\pm\sqrt{11}$
(ii) $x^2+2(a+2)x-4a-1=0$이 $x=1$을 근으로 갖는 경우
$x=1$을 대입하면 $1+2(a+2)-4a-1=0$
$\therefore\ a=2$
(i), (ii)에서 $a=2,\ -4\pm\sqrt{11}$

18. $x^3+1=0$의 한 허근을 ω라 할 때,$(\omega^2+1)^5+(\omega-1)^{100}$을 간단히 하면?

① 1 ② ω ③ $-\omega$ ④ 2ω ⑤ 0

해설

$x^3+1=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-x+1)=0$

$\omega^3+1=0,\ \omega^3=-1,\ \omega^2-\omega+1=0$

$\omega^2+1=\omega,\ \omega^6=1,\ \omega-1=\omega^2$

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= \omega^5+(\omega^2)^{100}=\omega^5+\omega^{200}\\ &= \omega^3\cdot\omega^2+(\omega^6)^{33}\cdot\omega^2\\ &= -\omega^2+\omega^2=0\end{aligned}$$

19. 다음 두 이차방정식

$$\begin{cases} x^2+4mx-(2m-1)=0 \\ x^2+mx+(m+1)=0 \end{cases}$$

이 단 하나의 공통근을 가질 때, m의 값은 ?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

공통근을 α라 하면
$\alpha^2+4m\alpha-(2m-1)=0\cdots$㉠
$\alpha^2+m\alpha+(m+1)=0\cdots$㉡
㉠ − ㉡하면
$3m\alpha-3m=0$
$3m(\alpha-1)=0 \quad \therefore\ m=0,\ \alpha=1$
$m=0$일 때 두 방정식이 일치하므로
단 하나의 공통근이라는 조건에 부적합
$\alpha=1$을 ㉡에 대입
$1+m+m+1=0 \quad \therefore\ m=-1$

20. 각 면에 1부터 12까지 자연수가 하나씩 적힌 정십이면체의 주사위가 있다. 이 주사위를 두 번 던져 나오는 눈의 수를 각각 $x,\ y$라 할 때, $xy-3x+2y=18$을 만족하는 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

$xy-3x+2y=18,\ x(y-3)+2y=18,$

$x(y-3)+2(y-3)=12$

$(x+2)(y-3)=12$

$x+2\geq 3$이므로

$(x+2,\ y-3)=(3,4),(4,3),(6,2),(12,1)$

$\therefore (x,\ y)=(1,7),(2,6),(4,5).(10,4)$

$\therefore$ 4개

21. 부등식 $|2x-2| < k+2$를 만족하는 실수 x값이 존재하기 위한 실수 k의 값의 범위는?

① $k \le -2$ ② $k > -2$ ③ $k \ge -2$
④ $k < 2$ ⑤ $k \ge 2$

해설

ⅰ) $x \ge 1$일 때,

$2x-2 < k+2,\ 2x < k+4 \quad \therefore x < \frac{1}{2}k+2$

$x \ge 1,\ x < \frac{1}{2}k+2$를 만족하는 x의 값이 존재하기 위해서는

$\frac{1}{2}k+2 > 1,\ k > -2$

ⅱ) $x < 1$일 때,

$-2x+2 < k+2,\ -2x < k,\ \therefore\ x > -\frac{1}{2}k$

$x < 1,\ x > -\frac{1}{2}k$를 만족하는 x의 값이 존재하기 위해서는

$-\frac{1}{2}k < 1 \quad \therefore k > -2$

ⅰ), ⅱ)에 의하여 $k > -2$

22. 부등식 $[x-1]^2+3[x]-3<0$의 해는? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $-2 \le x < 1$　② $-2 \le x < 0$　③ $-1 \le x < 1$
④ $-1 \le x < 0$　⑤ $0 \le x < 2$

해설

$x-1=A$라 하면 $x=A+1$
$\therefore [A]^2+3[A+1]-3=[A]^2+3[A]+3-3<0$
$[A]([A]+3)<0 \quad \therefore -3<[A]<0$
$-2 \le A < 0 \quad \therefore -2 \leqq x-1 < 0$이므로
$-1 \le x < 1$

23. 두 이차방정식 $x^2+2ax+a+2=0, x^2+(a-1)x+a^2=0$중 적어도 하나가 실근을 갖기 위한 상수 a의 값의 범위는?

① $a<\frac{1}{2},\ 2<a$　② $a\le 1,\ 3\le a$　③ $a\le\frac{1}{2},\ 3<a$
④ $a\le\frac{1}{2},\ 2<a$　⑤ $a\le\frac{1}{3},\ a\ge 2$

해설

각각 실근을 가질 조건은 차례로

$\frac{D_1}{4}=a^2-(a+2)\ge 0$에서

$(a-2)(a+1)\ge 0,\ a\le -1,\ a\ge 2\cdots$ ①

또, $D_2=(a-1)^2-4a^2\ge 0$에서

$(3a-1)(a+1)\le 0,\ -1\le a\le\frac{1}{3}\cdots$ ②

따라서, 적어도 하나가 실근을 갖기 위한

a의 범위는 ① 또는 ②이므로

$a\le\frac{1}{3},\ a\ge 2$

24. 양의 실수 a, b, c 에 대하여, x 에 관한 연립이차부등식 $\begin{cases} ax^2 - bx + c < 0 \\ cx^2 - bx + a < 0 \end{cases}$ 의 해가 존재할 때, 다음 <보기> 중 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보기>

ㄱ $b^2 - 4ac > 0$

ㄴ $a + c < b$

ㄷ $a < 1$ 이고 $b < c$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ 두 식의 판별식 값이
모두 $b^2 - 4ac$ 이고
$D > 0$ 이어야 해가 존재하므로 옳다.
ㄴ주어진 식에
1을 대입하면 성립한다.

25. 만식이네 학교에서 식권을 한번에 150장을 사면 할인하여 판매한다고 하여 친구들과 똑같이 돈을 모아 식권 150장을 샀다. 식권을 나누어 가지기 위해 6장씩 나누어 주었더니 식권이 남고, 10장씩 나누어 주었더니 식권이 부족했다. 같이 식권을 산 학생 수는 몇 명인가?

① 15명　② 18명　③ 30명　④ 43명　⑤ 54명

해설

문제에서 전체 사람의 수를 x 명이라고 놓자.
모든 사람이 식권을 6장씩 가지고 있을 때 전체 식권 수는 $6x$ 장이고, 모든 사람이 10장씩 가지고 있을 때 전체 식권의 수는 $10x$ 장이다. 그러나 실제 식권의 수 150장은 모두 6장씩 가질 때보다 많고, 모두 10장씩 가질 때보다는 적으므로, 이를 식으로 나타내면 $6x < 150 < 10x$ 이다.

이를 연립부등식으로 나타내면 $\begin{cases} 6x < 150 \\ 10x > 150 \end{cases}$ 이고, 간단히 하면, $\begin{cases} x < 25 \\ x > 15 \end{cases}$ 이다. 이를 다시 나타내면 $15 < x < 25$ 이다.

따라서 식권을 산 학생의 수는 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24 명이 모두 가능하다.