1. $(-1)^n + (-1)^{n+1}$ 의 값은? (n은 자연수)

① 0　　② -1　　③ 1　　④ -2　　⑤ 2

해설

$n = 2k$: $(-1)^n + (-1)^{n+1}$
$= (-1)^{2k} + (-1)^{2k+1}$
$= 0$
$n = 2k - 1$: $(-1)^n + (-1)^{n+1}$
$= (-1)^{2k-1} + (-1)^{2k}$
$= 0$

해설

$n =$ 홀수일때, $n + 1 =$ 짝수,
$(-1)^n + (-1)^{n+1} = -1 + 1 = 0$
$n =$ 짝수일때, $n + 1 =$ 홀수,
$(-1)^n + (-1)^{n+1} = 1 + (-1) = 0$

2. $(3a+3b)-2b=3a+(3b-2b)=3a+b$에서 사용된 법칙을 순서대로 나열한 것은?

① 결합법칙, 결합법칙
② 교환법칙, 결합법칙
③ 교환법칙, 분배법칙
④ 결합법칙, 분배법칙
⑤ 분배법칙, 결합법칙

해설

$(3a+3b)-2b=3a+(3b-2b)$: 결합법칙
$=3a+(3-2)b$: 분배법칙
$=3a+b$

3. $ax^2-(2a+c)x-1=(b-2)x^2-c$가 x의 값에 관계없이 항상 성립할 때, $a+b+c$의 값을 구하면?

① -1 ② 2 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

해설

양변의 계수를 비교하면

$a=b-2 \quad \cdots$ ㉠

$2a+c=0 \quad \cdots$ ㉡

$1=c \quad \cdots$ ㉢

$\therefore\ a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{3}{2},\ c=1$

$\therefore\ a+b+c=2$

4. 등식 $3x^2+5x=a(x-1)^2+b(x+1)+c$가 x에 관한 항등식이 되도록 하는 상수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a+b-c$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

우변을 전개하여 계수비교법으로 미정계수를 구한다.

$3x^2+5x=a(x-1)^2+b(x+1)+c$

$\qquad\quad =ax^2+(-2a+b)x+a+b+c$

$a=3,\ -2a+b=5,\ a+b+c=0$

$\therefore\ a=3,\ b=11,\ c=-14$

$\therefore\ a+b-c=28$

해설

수치대입법으로 미정계수를 구해도 된다.

양변에 $x=0$을 대입하면

$0=a+b+c\cdots$㉠

양변에 $x=1$을 대입하면

$8=2b+c\cdots$㉡

양변에 $x=-1$을 대입하면

$-2=4a+c\cdots$㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하면

$a=3,\ b=11,\ c=-14$

$\therefore\ a+b-c=28$

5. $\dfrac{1000^2}{252^2 - 248^2}$ 은?

① 62500　　② 1000　　③ 500　　④ 250　　⑤ $\dfrac{1}{2}$

해설

$$\begin{aligned}\frac{1000^2}{252^2 - 248^2} &= \frac{1000 \cdot 1000}{(252+248)(252-248)} \\ &= \frac{1000}{500} \cdot \frac{1000}{4} \\ &= 500\end{aligned}$$

6. 한 근이 $1-i$ 인 이차방정식이 $x^2+ax+b=0$ 일 때, 실수 $a+b$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

한 근이 $1-i$ 이면 다른 한 근은 $1+i$ 이다.
두 근의 합 : 2,
두 근의 곱 : 2
$\therefore\ a=-2\ ,\ b=2$

7. 이차함수 $y = -x^2 - 2x + 7(-3 \le x \le 1)$ 의 최댓값을 a, 최솟값을 b라 할 때, $a + b$의 값을 구하면?

① 4　② 7　③ 8　④ 11　⑤ 12

해설

$y = -x^2 - 2x + 7 = -(x+1)^2 + 8$이므로
꼭짓점의 좌표는 $(-1, 8)$이고, 위로 볼록한 포물선이다.
주어진 구간의 양 끝값을 구하면,
$x = -3$일 때 $y = -(-3+1)^2 + 8 = 4$
$x = 1$일 때 $y = -(1+1)^2 + 8 = 4$이다.
따라서 최댓값 $a = 8$이고, 최솟값 $b = 4$이므로 $a + b = 12$

8. $f(x) = x^3 - ax^2 + bx - 2$가 $(x-1)(x+2)$로 나누어 떨어지도록 상수 $a+b$의 값을 정하시오.

▶ 답:

▷ 정답: -3

해설

$f(x) = x^3 - ax^2 + bx - 2$ 라 놓으면,

$f(1) = 1 - a + b - 2 = 0$

$\therefore\ -a + b = 1 \cdots$ ㉠

$f(-2) = -8 - 4a - 2b - 2 = 0$

$\therefore\ 2a + b = -5 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a = -2,\ b = -1$

9. 다음 중 다항식 x^4-8x^2-9의 인수가 <u>아닌</u> 것은?

① $x-3$ ② $x+3$
③ x^2+1 ④ x^2+9
⑤ x^3+3x^2+x+3

해설
준 식을 인수분해 하면
$x^4-8x^2-9=(x^2+1)(x^2-9)$
$=(x^2+1)(x+3)(x-3)$
⑤ $x^2(x+3)+x+3=(x^2+1)(x+3)$

10. 두 복소수 $z_1 = 1+(a-2)i$, $z_2 = (b-2)-ai$ 에 대하여 $z_1+(2-4i) = z_2$ 가 성립할 때, 실수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a+b=8$

해설

$z_1 = 1+(a-2)i$, $z_2 = (b-2)-ai$ 를
$z_1+(2-4i) = z_2$ 에 대입하면
$1+(a-2)i+(2-4i) = (b-2)-ai$
$3+(a-6)i = (b-2)-ai$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$3 = b-2$, $a-6 = -a$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$b = 5$, $a = 3$
$\therefore\ a+b = 8$

11. $x = 3 + \sqrt{3}i$, $y = 3 - \sqrt{3}i$ 일 때, $x^3 + y^3$ 의 값을 구하면?

① 0　② 10　③ 20　④ -10　⑤ -20

해설

$x + y = 6, \quad xy = 12$

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) \\ &= 6^3 - 3 \cdot 12 \cdot 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

12. x에 대한 이차방정식 $(m+3)x^2-4mx+2m-1=0$이 중근을 갖도록 하는 실수 m의 값의 합은?

① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 중근을 가질 조건은 $D=0$이므로

$\frac{D}{4}=(-2m)^2-(m+3)(2m-1)=0$

$4m^2-(2m^2+5m-3)=0$

$2m^2-5m+3=0$

$(m-1)(2m-3)=0$

$\therefore m=1$ 또는 $\frac{3}{2}$

$\therefore 1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$

13. x에 대한 이차방정식 $(k-1)x^2+2kx+k-1=0$이 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 자연수 k의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

(i) 이차방정식이므로 x^2의 계수는 $k-1 \neq 0$이어야 한다.
따라서 $k \neq 1$

(ii) 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는 판별식 $\frac{D}{4}>0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=k^2-(k-1)^2>0,\ 2k-1>0$

$\therefore k>\frac{1}{2}$

따라서 자연수 k의 최솟값은 2이다.

14. 이차방정식 $x^2+(a+1)x+a-5=0$ 의 두 실근을 β, β^2 이라 할 때, $a+\beta+\beta^2$ 의 값은?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

두 근의 합은 $\beta+\beta^2=-a-1$ 이므로
$a+\beta+\beta^2=a-a-1=-1$

15. 이차함수 $y = -x^2 + 6x + 5$ 의 최댓값을 M , $y = 2x^2 - 12x - 4$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값을 구하면?

① 28　② 30　③ 32　④ 34　⑤ 36

해설

$y = -x^2 + 6x + 5$
$= -(x-3)^2 + 14 \quad \therefore M = 14$
$y = 2x^2 - 12x - 4$
$= 2(x-3)^2 - 22 \quad \therefore m = -22$
$\therefore M - m = 14 + 22 = 36$

16. 방정식 $x^6 - 1 = 0$ 의 해가 아닌 것은?

① -1　② 1　③ $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

④ $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$　⑤ $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

해설

$x^6-1 = (x^3+1)(x^3-1) = (x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1) = 0$

$\Rightarrow x = -1,\ 1,\ \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2},\ \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

17. 연립방정식 $\begin{cases} x-2y=1 \\ xy-y^2=6 \end{cases}$ 의 해를 구하면 $x=p,\ y=q$ 또는 $x=r,\ y=s$ 이다. $p+q+r+s$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$\begin{cases} x-2y=1 & \cdots ㉠ \\ xy-y^2=6 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=2y+1 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면

$y^2+y-6=0(y-2)(y+3)=0$

$\therefore\ y=2,\ -3$

$y=2,\ y=-3$을 ㉢에 대입하면

각각 $x=5,\ x=-5$

$\therefore\ x=5,\ y=2$ 또는 $x=-5,\ y=-3$

18. 두 다항식 $(1+2x+3x^2+4x^3)^3$, $(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^3$ 의 x^3 의 계수를 각각 a, b 라 할 때, $a-b$ 의 값을 구하면?

① -21 ② -15 ③ -5 ④ -1 ⑤ 0

해설

$(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^3$ 의 전개식에서
x^4 항의 계수는 x^3 의 계수와는 관계가 없다.
따라서 $(1+2x+3x^2+4x^3)^3$ 의 전개식에서 x^3 의 계수와 $(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^3$ 의 전개식에서 x^3 의 계수는 같다.
$\therefore\ a=b\quad \therefore\ a-b=0$

19. 세 실수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $(a,\ b,\ c) = ab + bc$로 정의한다. 이때, 등식 $(x,\ a,\ y) - (2x,\ b,\ y) = (x,\ 2,\ y)$이 임의의 실수 $x,\ y$에 대하여 성립하도록 $a,\ b$의 값을 정하면?

① $a = 1,\ b = 2$ ② $a = 2,\ b = 2$ ③ $a = 2,\ b = 0$
④ $a = 0,\ b = 2$ ⑤ $a = 0,\ b = 0$

해설

기호의 정의에 따라서 주어진 식을 다시 쓰면
$(ax + ay) - (2bx + by) = 2x + 2y$
이 식을 $x,\ y$에 대하여 정리하면
$(a - 2b - 2)x + (a - b - 2)y = 0$
이 등식이 임의의 $x,\ y$에 대하여 성립하므로
$a - 2b - 2 = 0,\ a - b - 2 = 0$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $a = 2,\ b = 0$

20. 모든 실수 x에 대하여 $2x^3-3x^2-x+1=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$이라 할 때, $a+b+c+d$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$2x^3-3x^2-x+1=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$

$x=2$를 대입하면,

$\{2\times(2)^3\}-(3\times2^2)-2+1=a+b+c+d$

$\therefore a+b+c+d=3$

21. 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지가 3이고, $x+1$로 나눈 나머지가 -1일 때, $(x^2+x+2)f(x)$를 x^2-1로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(1)$구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

나머지 정리에 의해 $f(1)=3, f(-1)=-1$
$(x^2+x+2)f(x)=(x^2-1)Q(x)+ax+b$
$x=1, x=-1$ 을 대입한다.
$4f(1)=12=a+b\cdots$ ㉠
$2f(-1)=-2=-a+b\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면,
$a=7,\ b=5$
$\therefore$ 나머지 $R(x)=7x+5$
$R(1)=12$

22. $3x^2 + 2xy - y^2 - x + 3y - 2$의 인수인 것은?

① $2x + y + 1$　② $x + y + 1$　③ $2x - y + 1$
④ $3x - y + 2$　⑤ $3x + y + 2$

해설

준 식을 내림차순으로 정리하면
$3x^2 + 2xy - x - y^2 + 3y - 2$
$= 3x^2 + (2y - 1)x - (y - 1)(y - 2)$
인수분해하면 $(x + y - 1)(3x - y + 2)$

23. 서로 다른 세 실수 $x,\ y,\ z$에 대하여 $x^3+y^3+z^3=3xyz$ 를 만족할 때, $x+y+z$ 의 값은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0$

$(x+y+z)=0$ 또는 $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$

$\therefore\ x+y+z=0$ 또는 $\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}=0$

그런데 $x,\ y,\ z$ 가 서로 다른 세 실수$(x\neq y\neq z)$ 이므로

$x+y+z=0$

24. 세 다항식 x^2+ax-4, ax^2-bx-2, $2x^2-ax+b$의 최대 공약수가 $x-1$일 때, 최소공배수를 구하면?

① $(x-1)(x+4)(3x+2)$

② $(x-1)(x+4)(2x-1)$

③ $(x+4)(2x-1)$

④ $(x-1)(x+4)(3x+2)(2x-1)$

⑤ $(x-1)(x-4)(3x+2)(2x+1)$

해설

나머지 정리를 이용하면 $f(1)=0$

$1+a-4=0,\ \ a-b-2=0,\ \ 2-a+b=0$

연립하여 풀면, $a=3,\ \ b=1$

$\therefore\ \ x^2+3x-4=(x-1)(x+4)$

$3x^2-x-2=(x-1)(3x+2)$

$2x^2-3x+1=(x-1)(2x-1)$

따라서 최소공배수$=(x-1)(x+4)(3x+2)(2x-1)$

25. 최대공약수가 $x+1$ 인 두 다항식 x^2+3x+a, x^2+ax-b 의 최소공배수를 $L(x)$ 라 할 때, $L(1)$ 의 값은?

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

해설

최대공약수가 $x+1$ 이므로
두 다항식에 $x=-1$ 을 대입하면 0이 된다.
$1-3+a=0 \therefore a=2$
$1-a-b=0 \quad \therefore b=-1$
따라서 두 다항식은 각각
$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$
$x^2+2x+1=(x+1)^2$
최소공배수 $L(x)$ 는 $(x+1)^2(x+2)$
$\therefore L(1)=(1+1)^2(1+2)=12$

26. 이차항의 계수가 1인 두 이차다항식 A, B의 최대공약수가 $x+2$이고 최소공배수가 x^3+x^2-4x-4이다. $A+B=ax^2+bx+c$를 만족하는 상수 $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^3+x^2-4x-4=(x+2)(x+1)(x-2)$

두 다항식은 각각 $(x+2)(x+1), (x+2)(x-2)$

$A+B=(x+2)(x-2)+(x+2)(x+1)$

$=2x^2+3x-2=ax^2+bx+c$

$\therefore a=2, b=3, c=-2$

$\therefore\ a+b+c=3$

27. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n = 1$ 을 만족하는 최소의 자연수 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $n = 4$

해설

$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i$ 에서

$n = 1$ 일 때, $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^1 = -i$

$n = 2$ 일 때, $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 = (-i)^2 = -1$

$n = 3$ 일 때, $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 = (-i)^3 = i$

$n = 4$ 일 때, $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4 = (-i)^4 = 1$

따라서 조건을 만족하는 최소의 자연수는 4 이다.

28. 다음 보기 중 옳은 것의 개수는? (단, $i = \sqrt{-1}$)

㉠ 16의 제곱근은 4이다.

㉡ 실수를 제곱하면 양수 또는 0이다.

㉢ 복소수 $z = a + bi$ (a, b는 실수)에 대하여 $z + \bar{z}$는 실수이다. (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수)

㉣ 복소수 $z = a + bi$ (a, b는 실수)에 대하여 $z\bar{z}$는 실수이다. (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

㉤ 복소수 $z = a + bi$ (a, b는 실수)에 대하여 $z = \bar{z}$이면 z는 실수이다. (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

㉠ 제곱해서 16 이 되는 수 $4, -4$ ∴ 거짓
㉡ 실수는 제곱하면 0보다 크거나 같다. ∴ 참
㉢ $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$, $z + \bar{z} = 2a$ ∴ 참
㉣ $z\bar{z} = a^2 + b^2$ ∴ 참
㉤ $z = \bar{z}$, $a + bi = a - bi$, $2bi = 0$, $b = 0$ ∴ $z = a = \bar{z}$ ∴ 참

29. 복소수 α, β 에 대하여 연산 $*$ 를 $\alpha*\beta=(\alpha+\beta)-\alpha\beta$ 라 하자. $z=\dfrac{5}{-2-i}$ 일 때, $z*\bar{z}$ 의 값은?

① -1　② 1　③ -9　④ 9　⑤ 0

해설

$z=-2+i$, $\bar{z}=-2-i$

$$\begin{aligned} z*\bar{z} &= (z+\bar{z})-z\bar{z} \\ &= -4-5 \\ &= -9 \end{aligned}$$

30. 실수 k 에 대하여 $\frac{\sqrt{k-1}}{\sqrt{k-2}} = -\sqrt{\frac{k-1}{k-2}}$ 이 성립할 때, $|k-3|+|k-1|$ 을 간단히 하면?

① -2　　② 4　　③ 2

④ $|2k-4|$　　⑤ $|-2k-2|$

해설

$k-1 \geq 0,\ k-2 < 0$

$1 \leq k < 2$

$|k-3|+|k-1| = -(k-3)+(k-1) = 2$

31. $|x-2|+|x-3|=1$을 만족하는 실수 x의 개수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개
④ 3개 ⑤ 4개이상

해설

$|x-2|+|x-3|=1$에서
i) $x<2$일 때,
$-(x-2)-(x-3)=1$
$\therefore\ x=2$ (성립하지 않음)
ii) $2\le x<3$일 때,
$(x-2)-(x-3)=1$
$\therefore\ 0\cdot x=0$ (모든 실수)
iii) $x\ge 3$일 때,
$(x-2)+(x-3)=1$
$\therefore\ x=3$

32. 이차함수 $y = 3x^2 - 6ax + 2a^2 - 4a + 6$ 의 최솟값을 m 이라고 할 때, m 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$y = 3x^2 - 6ax + 2a^2 - 4a + 6$
$= 3(x-a)^2 - a^2 - 4a + 6$

최솟값 $m = -a^2 - 4a + 6 = -(a+2)^2 + 10$

$\therefore m$ 의 최댓값 : 10

33. 차가 12 인 두 수가 있다. 이 두 수의 곱이 최소가 될 때, 두 수 중 큰 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

두 수를 각각 x, $x+12$ 라 하면

$y = x(x+12)$

$\quad = x^2 + 12$

$x = (x+6)^2 - 36$

$x = -6$ 일 때, 최솟값 -36 을 갖는다.

$x = -6, \ -6+12 = 6$

따라서 두 수 중에서 큰 수는 6 이다.

34. 지면으로부터 30m 높이의 건물 옥상에서 초속 20m 로 똑바로 위로 던져 올린 물체의 x 초 후의 높이를 ym 라고 하면 $y = -5x^2 + 20x + 30$ 의 관계가 성립한다. 이 물체가 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간과 그 때의 높이를 구하여라.

▶ 답 : 초

▶ 답 : m

▷ 정답 : 2초

▷ 정답 : 50m

해설

$y = -5x^2 + 20x + 30$ 에서 $y = -5(x-2)^2 + 50$ 이다.
따라서 $x = 2$ 일 때, y 는 최댓값 50 을 갖는다.

35. 다음 연립방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x + y = u$, $xy = v$ 로 놓으면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} u^2 - 2v = 25 \\ v = 12 \end{cases}$$

$\therefore\ u = \pm 7,\ v = 12$

따라서, 주어진 연립방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{cases} x + y = 7 & \cdots ㉢ \\ xy = 12 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

또는 $\begin{cases} x + y = -7 & \cdots ㉣ \\ xy = 12 & \cdots ㉡ \end{cases}$

(i) ㉢, ㉡에서 $x,\ y$ 는 이차방정식 $t^2 - 7t + 12 = 0$ 의 두 근이므로 $x = 3,\ y = 4$ 또는 $x = 4,\ y = 3$

(ii) ㉣, ㉡에서 $x,\ y$ 는 이차방정식 $t^2 + 7t + 12 = 0$ 의 두 근이므로 $x = -3,\ y = -4$ 또는 $x = -4,\ y = -3$

(i), (ii)로부터 구하는 모든 해의 합은 0