1. 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라고 할 때, $xf(x)-3$을 $x+1$로 나눈 몫과 나머지는?

① $xQ(x), -R-3$

② $xQ(x), -R+3$

③ $xQ(x), -R-6$

④ $xQ(x)+R, -R-3$

⑤ $xQ(x)+R, -R+3$

해설

$$
\begin{aligned}
&f(x) = (x+1)Q(x) + R \\
&\therefore\ xf(x) = x(x+1)Q(x) + xR \\
&\therefore\ xf(x) - 3 = x(x+1)Q(x) + xR - 3 \\
&\qquad = (x+1)\left\{xQ(x)\right\} + (x+1)R - R - 3 \\
&\qquad = (x+1)\left\{xQ(x) + R\right\} - R - 3
\end{aligned}
$$

2. 다항식 $A = 2x^3 - 7x^2 - 4$ 를 다항식 B 로 나눌 때, 몫이 $2x - 1$, 나머지가 $-7x - 2$ 이다. 다항식 $B = ax^2 + bx + c$ 일 때, $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값은?

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 14 ⑤ 17

해설

$A = 2x^3 - 7x^2 - 4 = B(2x - 1) - 7x - 2$ 이다.
$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = B(2x - 1)$
좌변을 $2x - 1$ 로 나누면
$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = (2x - 1)(x^2 - 3x + 2)$
$\therefore\ B = x^2 - 3x + 2$

3. 다음 식을 전개한 것 중 옳은 것을 고르면?

① $(x-y-z)^2 = x^2 - y^2 - z^2 - 2xy + 2yz - 2zx$

② $(3x-2y)^3 = 27x^3 - 54x^2y + 18xy^2 - 8y^3$

③ $(x+y)(x-y)(x^2+xy-y^2)(x^2-xy+y^2) = x^9 - y^9$

④ $(x^2-2xy+2y^2)(x^2+2xy+2y^2) = x^4 + 4y^4$

⑤ $(x+y-1)(x^2+y^2-xy+2x+2y+1) = x^3 + y^3 - 3xy - 1$

해설

① $(x-y-z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2yz - 2zx$

② $(3x-2y)^3 = 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$

③ $(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$
$= x^6 - y^6$

⑤ $(x+y-1)(x^2+y^2-xy+x+y+1)$
$= x^3 + y^3 - 3xy - 1$

4. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 5$에 대하여 $f(x-1) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$일 때, 상수$A \times B \times C$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 66

해설

$$\begin{aligned} f(x-1) &= (x-1)^3 - 3(x-1)^2 + 2(x-1) + 5 \\ &= x^3 + Ax^2 + Bx + C \cdots ㉠ \end{aligned}$$

㉠은 x에 대한 항등식이므로
양변에 $x = 0,\ 1,\ 2$를 차례로 대입하면,
$x = 0$일 때, $-1 = C$
$x = 1$일 때, $5 = 1 + A + B + C$
$x = 2$일 때, $5 = 8 + 4A + 2B + C$
위의 세 식을 연립하여 풀면
$A = -6,\ B = 11,\ C = -1$

5. x의 다항식 x^3+ax+b를 x^2-3x+2로 나눌 때, 나머지가 $2x+1$이 되도록 상수 a, b의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

x^3+ax+b를 x^2-3x+2로 나눌 때,
몫을 $x+q$라 하면 (일반적으로 $px+q$로 해야겠지만 x^3의 계수가 1이므로 $x+q$)
$x^3+ax+b=(x^2-3x+2)(x+q)+2x+1$
$\therefore\ x^3+ax+b=(x-2)(x-1)(x+q)+2x+1$
이 등식은 x에 관한 항등식이므로
$x=1$을 대입하면 $1+a+b=2+1\cdots$ ㉠
$x=2$를 대입하면 $8+2a+b=4+1\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $a=-5$, $b=7$
$\therefore\ a+b=2$

6. 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지가 -3이고, $x-3$으로 나눈 나머지가 5이다. $f(x)$를 $(x+1)(x-3)$로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $2x-1$

해설

$f(-1)=-3,\ f(3)=5$

$f(x)=(x+1)(x-3)Q(x)+ax+b$

$-a+b=-3,\ 3a+b=5$

$a=2,\ b=-1$

$\therefore\ ax+b=2x-1$

7. $x^5 + x + 1$을 $x + 1$로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 할 때, $Q(x)$를 $x - 1$로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x^5 + x + 1 = (x + 1)Q(x) + R$

$x = -1$을 양변에 대입하면 $R = -1$

$\therefore\ x^5 + x + 1 = (x + 1)Q(x) - 1 \cdots$ ㉠

$Q(x)$를 $x - 1$로 나눈 나머지는 $Q(1)$

㉠에 $x = 1$을 대입하면 $3 = 2Q(1) - 1$

$\therefore\ Q(1) = 2$

8. x 에 관한 항등식$x^3+2x^2-3x+5=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$ 를 만족시키는 $a,\ b,\ c,\ d$ 에 대하여 $abcd$ 의 값은?

① -10 ② 10 ③ 50 ④ 100 ⑤ 200

해설

$a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$
$=(x-1)\{a(x-1)^2+b(x-1)+c\}+d$
$=(x-1)[(x-1)\{a(x-1)+b\}+c]+d$
따라서 x^3+2x^2-3x+5 를 $x-1$ 로 연속으로 나눌 때 나오는 나머지가 순서대로 $d,\ c,\ b$ 가 되고 마지막의 몫이 a 이다.

$a=1,\ b=5,\ c=4,\ d=5$
$\therefore\ abcd=100$

9. 다음 중 $x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18$ 의 인수가 아닌 것은?

① $x - 1$ ② $x + 1$ ③ $x - 3$ ④ $x + 3$ ⑤ $x + 2$

해설

준식을 인수정리와 조립제법을 이용하여 정리하면
$(x-1)(x-3)(x+2)(x+3) = 0$
※ 최고차항의 계수가 1 인 다항식에서 인수정리를 사용할 때,
상수항의 약수 중에서 대입하여 0 이 되는 정수를 찾아본다.

10. $x = 1001$ 일 때, $\dfrac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1000

해설

$$\begin{aligned}\frac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1} &= \frac{(x^4+1)(x^2-1)}{(x^4+1)(x+1)} \\ &= x - 1 \\ &= 1001 - 1 \\ &= 1000\end{aligned}$$

11. $x^4 + 2x^2 + 9 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$로 인수분해될 때, $|ab - cd|$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

(준식) $= (x^2 + 3)^2 - (2x)^2$

$= (x^2 + 2x + 3)(x^2 - 2x + 3)$

여기서 계수를 비교하면

$a = 2,\ b = 3,\ c = -2,\ d = 3$

$\therefore |ab - cd| = |2 \times 3 - (-2) \times 3| = 12$

12. $(3+4i)^5(15-20i)^5$ 을 간단히 하면?(단, $i=\sqrt{-1}$)

① 5^7　② 5^{10}　③ 5^{12}　④ 5^{15}　⑤ 5^{20}

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= 5^5(3+4i)^5(3-4i)^5\\ &= 5^5\{(3+4i)(3-4i)\}^5\\ &= 5^5(5^2)^5\\ &= 5^{15}\end{aligned}$$

13. 방정식 $x^2 - 2|x| - 3 = 0$의 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

ⅰ) $x \geq 0$일 때
$x^2 - 2x - 3 = 0$, $(x+1)(x-3) = 0$
$x = -1$ 또는 $x = 3$
그런데 $x \geq 0$이므로 $x = 3$
ⅱ) $x < 0$일 때
$x^2 + 2x - 3 = 0$, $(x-1)(x+3) = 0$
$x = 1$ 또는 $x = -3$
그런데 $x < 0$이므로 $x = -3$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $x = 3$ 또는 $x = -3$
따라서 근의 합은 0이다.

14. x 에 대한 두 이차방정식
$x^2 - 2\sqrt{b}x + (2a+1) = 0 \cdots$ ㉠
$x^2 - 2ax - b = 0 \cdots$ ㉡가 있다. ㉠이 서로 다른 두 실근을 가질 때, ㉡의 근을 판별하면? (단, a, b 는 실수이고, $b \geq 0$)

① 서로 다른 두 실근을 가진다.

② 중근을 가진다.

③ 서로 다른 두 허근을 가진다.

④ 판별할 수 없다.

⑤ 한 개의 실근과 한 개의 허근을 가진다.

해설

㉠의 판별식을 D 라 하면

$\frac{D}{4} = b - (2a+1) > 0 \therefore \ b > 2a+1$

㉡의 판별식을 D' 이라 하면

$\frac{D'}{4} = a^2 + b > a^2 + 2a + 1$

$= (a+1)^2 \geq 0$

$\therefore \ \frac{D'}{4} > 0$

따라서, ㉡은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

15. 이차방정식 $x^2+5(a-1)x-24a=0$의 두 근의 비가 $2 : 3$일 때, 실수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

두 근을 $\alpha=2k,\ \beta=3k$라고 하면
$\alpha+\beta=2k+3k=-5(a-1)$
$\alpha\beta=2k\times 3k=-24a$
$\therefore k=1-a,\ k^2=-4a$
$a=1-k$를 대입하면
$k^2+4(1-k)=k^2-4k+4=(k-2)^2=0$
$\therefore k=2$
$\therefore a=-1$

해설

16. 이차방정식 $x^2 - mx + 91 = 0$의 두 근, α, β는 서로소이다. 이때, 실수 m의 값은? (단, α, β는 $\alpha > 1,\ \beta > 1$인 자연수)

① 10 ② 20 ③ 35 ④ 55 ⑤ 100

해설

근과 계수와의 관계에 의해 $\alpha + \beta = m,\ \alpha\beta = 91$
α와 β가 서로소이고 자연수이므로
$(\alpha,\ \beta) = (1,\ 91)$ 또는 $(7,\ 13)$ 이다.
여기서 $\alpha > 1,\ \beta > 1$이므로
$(\alpha, \beta) = (7, 13)$
$\therefore m = \alpha + \beta = 20$

17. $4x^2-8x+7$ 을 복소수 범위에서 인수분해하면?

① $(2x-2-\sqrt{3}i)(2x-2+\sqrt{3}i)$

② $(2x+2-\sqrt{3}i)(2x-2+\sqrt{3}i)$

③ $(x-2-\sqrt{3}i)(x+2+\sqrt{3}i)$

④ $(x-2-\sqrt{3}i)(x-2+\sqrt{3}i)$

⑤ $\left(x-\frac{2+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x-\frac{2-\sqrt{3}i}{2}\right)$

해설

$x=\frac{4\pm\sqrt{16-28}}{4}=1\pm\frac{2\sqrt{3}i}{4}=1\pm\frac{\sqrt{3}i}{2}$

$4\left(x-1-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$=(2x-2-\sqrt{3}i)(2x-2+\sqrt{3}i)$

18. A, B 두 사람이 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$을 푸는데 A는 b를 잘못 읽어 -4와 7을, B는 c를 잘못 읽어 $-3 \pm \sqrt{2}i$를 근으로 얻었다. 원래의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

A는 a와 c를 바르게 읽었으므로
근과 계수와의 관계에서
$\frac{c}{a} = -4 \cdot 7 = -28,\ c = -28a$
B는 a와 b는 바르게 읽었으므로
$-\frac{b}{a} = (-3 + \sqrt{2}i) + (-3 - \sqrt{2}i) = -6,\ b = 6a$
따라서 원래의 이차방정식은
$ax^2 + 6ax - 28a = 0$
근과 계수와의 관계에 의해 두 근의 합은 -6

19. 두 곡선 $y = x^2$ 과 $y = -x^2 + 2x - 5$ 에 동시에 접하는 접선은 두 개가 있다. 이 두 접선의 y 절편의 곱을 구하여라.

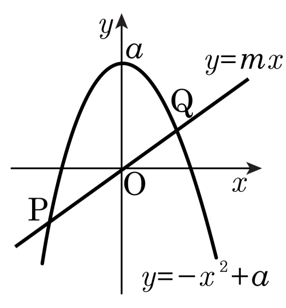
▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$y = x^2$ 위의 접점을 $(t,\ t^2)$ 으로 놓으면
$y' = 2x$ 이므로 $y'_{x=t} = 2t$ 는 접선의 기울기이다.
따라서 접선의 방정식은
$y - t^2 = 2t(x - t) \cdots$ ㉠
㉠이 곡선 $y = -x^2 + 2x - 5$ 에도 접하므로
$2tx - t^2 = -x^2 + 2x - 5$ 에서
$x^2 + 2(t - 1)x + (5 - t^2) = 0 \cdots$ ㉡
㉡의 판별식 $\frac{D}{4} = 0$ 이므로
$(t - 1)^2 - (5 - t^2) = 0$ 에서
$(t + 1)(t - 2) = 0 \quad \therefore\ t = -1,\ 2$
㉠에서
$t = -1$ 일 때, $y = -2x - 1$
$t = 2$ 일 때, $y = 4x - 4$
따라서 두 y 절편의 곱은 $(-1) \cdot (-4) = 4$

20. 다음 그림과 같이 이차함수 $y=-x^2+a$의 그래프와 직선 $y=mx$가 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 점 Q의 x좌표가 $\sqrt{5}-1$일 때, $a+m$의 값을 구하여라. (단, a , m 은 유리수)



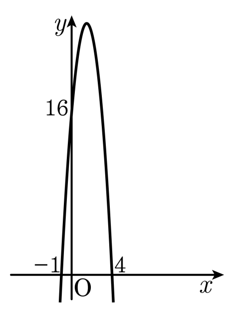
▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y=-x^2+a$ 와 $y=mx$ 가 만나는 두 점 P, Q 의 x 좌표는 방정식이 $-x^2+a=mx$ 의 근이다.
점 Q의 x 좌표가 $\sqrt{5}-1$이므로
방정식 $x^2+mx-a=0$의 한 근이 $\sqrt{5}-1$ 이다.
그런데 a 와 m 이 유리수이므로 다른 한 근은 $-\sqrt{5}-1$ 이다.
따라서, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-m=\left(\sqrt{5}-1\right)+\left(-\sqrt{5}-1\right)=-2$
$-a=\left(\sqrt{5}-1\right)\left(-\sqrt{5}-1\right)=-4$
$\therefore a=4,\ m=2 \qquad \therefore a+m=6$

21. 다음 그래프에서 최댓값을 구하면?



① 21　　② 22　　③ 23

④ 24　　⑤ 25

해설

x 절편이 -1 과 4 이므로

$y = a(x+1)(x-4)$

점 $(0,\ 16)$ 을 지나므로

$16 = a(-4)$, $a = -4$

$$\begin{aligned} y &= -4(x+1)(x-4) \\ &= -4(x^2-3x-4) \\ &= -4\left(x^2-3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}\right)+16 \\ &= -4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+25 \end{aligned}$$

$x = \dfrac{3}{2}$ 일 때, 최댓값은 25 이다.

22. $a+b+c=7$, $a^2+b^2+c^2=21$, $abc=8$일 때, $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$의 값은?

① 26　② 48　③ 84　④ 96　⑤ 112

해설

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^c+2(ab+bc+ca)$

$49=21+2(ab+bc+ca)$

$\therefore\ ab+bc+ca=14$

$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)$

$=(14)^2-2(8\times7)$

$=84$

23. $x - \frac{1}{x} = 1$ 일 때, $x^5 + \frac{1}{x^5}$ 의 값은 ?

① $\pm 6\sqrt{5}$ ② $\pm 5\sqrt{5}$ ③ $\pm 3\sqrt{5}$
④ $\pm 2\sqrt{5}$ ⑤ $\pm\sqrt{5}$

해설

$x^5 + \frac{1}{x^5} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right)$ 에서

$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 = 3$ 에서

$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 5$

$\therefore\ x + \frac{1}{x} = \pm\sqrt{5}$

$$\begin{aligned} x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= \pm 5\sqrt{5} - 3(\pm\sqrt{5}) = \pm 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

$\therefore\ x^5 + \frac{1}{x^5} = 3(\pm 2\sqrt{5}) - (\pm\sqrt{5}) = \pm 5\sqrt{5}$

24. x에 대한 항등식 $(1+2x-x^2)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{10}x^{10}$ 에서 $3a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{10}$ 의 값은?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

ⅰ) 항등식의 상수항 : $a_0 = 1$

ⅱ) 항등식에 $x = 1, x = -1$을 대입하여 식을 만든다.

$x = 1$을 대입하면 $2^5 = a_0 + a_1 + \cdots + a_{10} \cdots$①

$x = -1$을 대입하면 $(-2)^5 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \cdots + a_{10} \cdots$②

①+②: $0 = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{10})$

$\therefore a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{10} = 0$

$3a_0 + a_2 + a_4 + \cdots a_{10} = 2 (\because a_0 = 1)$

25. x에 관한 다항식 $f(x)$를 x^2-4로 나눈 나머지는 $2x+1$이고, $g(x)$를 x^2-5x+6으로 나눈 나머지는 $x-4$이다. 이 때, $(x+2)f(x)+3g(x+1)$을 $x-2$로 나눈 나머지를 구하면?

① 7　　② 9　　③ 13　　④ 17　　⑤ 23

해설

$f(x)=(x^2-4)p(x)+2x+1$에서 $f(2)=5$

$g(x)=(x^2-5x+6)q(x)+x-4$에서 $g(3)=-1$

$h(x)=(x+2)f(x)+3g(x+1)$이라 놓으면,

$h(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는

$h(2)=4f(2)+3g(3)=17$

26. 다항식 $f(x)$를 $\left(x-\frac{2}{3}\right)$로 나눌때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라고 할 때, 다음 중 $f(x)$를 $3x-2$로 나누었을 때의 몫과 나머지는?

① $Q(x),\ R$　② $3Q(x),\ R$　③ $Q(x),\ 3R$
④ $\frac{1}{3}Q(x),\ R$　⑤ $Q(x),\ \frac{1}{3}R$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x-\frac{2}{3}\right)Q(x)+R \\ &= 3\left(x-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}Q(x)+R \\ &= (3x-2)\frac{1}{3}Q(x)+R \end{aligned}$$

이므로 구하는 몫과 나머지는

몫: $\frac{1}{3}Q(x)$ 나머지: R

27. $2x^2+xy-y^2+10x+4y+12$를 x, y의 두 일차식의 곱으로 인수분해하면, $(x+ay+b)(2x+cy+d)$가 된다고 할 때, $a+b+c+d$의 값은? (단, a, b, c, d 는 상수)

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$2x^2+xy-y^2+10x+4y+12$ (← x에 관하여 정리)
$=2x^2+(y+10)x-(y^2-4y-12)$
$=2x^2+(y+10)x-(y+2)(y-6)$
$=\{x+(y+2)\}\{2x-(y-6)\}$
$=(x+y+2)(2x-y+6)$
$\therefore\ a=1,\ b=2,\ c=-1,\ d=6$
$\therefore\ a+b+c+d=8$

28. x에 관한 세 개의 다항식 $A(x)=x^4-10x^2+9$, $B(x)=x^4-x^3-7x^2+x+6$, $C(x)=x(x-3)(x^2+a)-(x-3)(x^2+b)+8$의 최대공약수가 이차식일 때, $a+b$의 값은?

① 4　② -4　③ 8　④ -8　⑤ 2

해설

$A(x)=x^4-10x^2+9=(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)$

$B(x)=x^4-x^3-7x^2+x+6$

$\quad=(x-1)(x+1)(x-3)(x+2)$

$\therefore$두 다항식의 최대공약수는$(x-1)(x+1)(x-3)$

그런데 다항식 $C(x)$는 $x-3$으로 나누어떨어지지 않으므로

세 다항식의 최대공약수는$(x-1)(x+1)$이다.

$\therefore$ 다항식 $C(\pm1)=0$

$\therefore$ $C(1)=-a+b+4=0,\ C(-1)=a+b+4=0$

$\therefore$ $a=0,\ b=-4$에서 $a+b=-4$

29. x, y 가 실수일 때, 복소수 $z = x + yi$ 의 켤레복소수를 $\bar{z}$ 라 하면 $z\bar{z} = 3$ 일 때, $\frac{1}{2}\left(z + \frac{3}{z}\right)$ 의 값은 ?

① x　　② y　　③ $x+y$
④ $x-y$　　⑤ $2x+y$

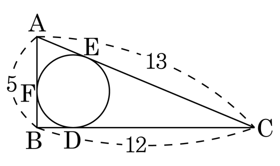
해설

$z = x + yi$, $\bar{z} = x - yi$ 이므로

$z \cdot \bar{z} = 3$ 이면 $\bar{z} = \frac{3}{z}$ 을 대입

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(z + \frac{3}{z}\right) &= \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \\ &= \frac{1}{2}(x + yi + x - yi) \\ &= x\end{aligned}$$

30. 다음 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}} = 5$, $\overline{\mathrm{BC}} = 12$, $\overline{\mathrm{AC}} = 13$, $\angle\mathrm{B} = 90°$인 직각삼각형 ABC에 내접하는 원이 $\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{AC}}$, $\overline{\mathrm{AB}}$에 접하는 점을 각각 D, E, F라 하자. $\overline{\mathrm{BF}} = \alpha$, $\overline{\mathrm{AE}} = \beta$라 할 때, α, β를 두 근으로 하고 x^2이 계수가 1인 이차방정식은?



① $x^2 - 5x + 6 = 0$　　② $x^2 + 5x + 6 = 0$

③ $x^2 - 12x + 20 = 0$　　④ $x^2 + 12x + 20 = 0$

⑤ $x^2 - 13x + 30 = 0$

해설

$\overline{\mathrm{BF}} = \overline{\mathrm{BD}} = \alpha$, $\overline{\mathrm{AF}} = \overline{\mathrm{AE}} = 5 - \alpha = \beta$,

$\overline{\mathrm{CD}} = \overline{\mathrm{CE}} = 12 - \alpha$

그런데 $\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{AE}} + \overline{\mathrm{CE}}$이므로

$(5 - \alpha) + (12 - \alpha) = 13$

$2\alpha = 4 \quad \therefore \alpha = 2$

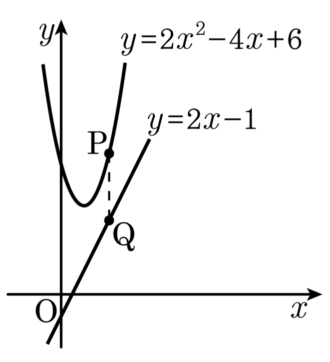
$\overline{\mathrm{AE}} = 5 - 2 = 3 \quad \therefore \beta = 3$

두 수 2, 3을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2 - (2 + 3)x + 2 \times 3 = 0$

$\therefore x^2 - 5x + 6 = 0$

31. 다음 그림과 같이 $y = 2x^2 - 4x + 6$ 과 $y = 2x - 1$ 이 y 축에 평행인 직선과 만나는 점을 P, Q 라 할 때, $\overline{PQ}$ 의 최솟값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{5}{2}$

해설

$\overline{PQ}$ 가 y 축에 평행하므로 점 P, Q 의 x 좌표는 같다. 이 때, 점 P 의 좌표를 $(t,\ 2t^2 - 4t + 6)$ 이라고 하면,
점 Q 의 좌표는 $(t,\ 2t - 1)$ 이다.

$\overline{PQ} = 2t^2 - 4t + 6 - (2t - 1) = 2t^2 - 6t + 7 = 2\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}$

$\therefore t = \frac{3}{2}$ 일 때, $\overline{PQ}$ 의 최솟값은 $\frac{5}{2}$

32. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 3$ 일 때, 최솟값 -4 를 가지며 점 $(1,\ 2)$ 를 지난다. 이 때, $a - b - c$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

꼭짓점이 $(3,\ -4)$ 이므로 $y = a(x-3)^2 - 4$

$(1,\ 2)$ 를 대입하면

$2 = 4a - 4$

$\therefore a = \frac{3}{2}$

$y = \frac{3}{2}(x-3)^2 - 4 = \frac{3}{2}x^2 - 9x + \frac{19}{2}$

$a = \frac{3}{2},\ b = -9,\ c = \frac{19}{2}$

$\therefore\ a - b - c = \frac{3}{2} - (-9) - \frac{19}{2} = 1$

33. $1 \leq x \leq a$ 에서 함수 $y = x^2 - 2x - 3a$ 의 최댓값과 최솟값의 차가 4 일 때, a 의 값은?

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

$y = x^2 - 2x - 3a = (x-1)^2 - 3a - 1$
최솟값 : $x = 1$ 일 때 $\Rightarrow -3a - 1$
최댓값 : $x = a$ 일 때 $\Rightarrow a^2 - 5a$
$\therefore a^2 - 5a - (-3a - 1) = 4$
$\Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0$
$a = 3\ (\because a > 1)$

34. x에 대한 다항식 $f(x)$를 x^2+1로 나누면 나누어 떨어지고, $x-3$으로 나눌 때의 나머지는 5이다. 이 다항식 $f(x)$를 $(x^2+1)(x-3)$으로 나눌 때의 나머지를 구하면?

① $\frac{1}{2}(x^2+1)$　② $\frac{1}{3}(x^2+1)$　③ $\frac{1}{5}(x^2+1)$
④ $2x^2-3x+1$　⑤ $\frac{2}{3}x^2-x+\frac{1}{2}$

해설

$f(x)=(x^2+1)Q_1(x)$
$f(x)=(x-3)Q_2(x)+5$
$\therefore\ f(3)=5$
$f(x)=(x^2+1)(x-3)Q_3(x)+ax^2+bx+c$
$\quad=(x^2+1)(x-3)Q_3(x)+a(x^2+1)$
$\quad(\because f(x)$는 x^2+1로 나누어 떨어지므로$)$
$\quad=(x^2+1)\{(x-3)Q_3(x)+a\}$
$x=3$을 대입하면 $f(3)=10a=5$
$\therefore\ a=\frac{1}{2}$이고 나머지는 $\frac{1}{2}(x^2+1)$

35. 세 변의 길이가 $x,\ y,\ z$인 삼각형 ABC에서 등식 $(x^4-y^4)(x+y)-2(x^3-y^3)z^2+(x-y)z^4=0$이 성립할 때, $\triangle$ABC는 어떤 삼각형인가?

① $z=x$인 이등변삼각형, 또는 y가 빗변인 직각삼각형

② $y=z$인 이등변삼각형, 또는 x가 빗변인 직각삼각형

③ x가 빗변인 직각삼각형

④ y가 빗변인 직각삼각형

⑤ $x=y$인 이등변 삼각형, 또는 z가 빗변인 직각삼각형

해설

$(x^4-y^4)(x+y)-2(x^3-y^3)z^2+(x-y)z^4$
$=(x-y)(x+y)^2(x^2+y^2)-2(x-y)(x^2+xy+y^2)z^2+(x-y)z^4$
$=(x-y)\{(x^2+2xy+y^2)(x^2+y^2)-2(x^2+xy+y^2)z^2+z^4\}$
$=(x-y)\{x^4+x^2y^2+2x^3y+2xy^3+x^2y^2+y^4-2x^2z^2-2xyz^2-2y^2z^2+z^4\}$
$=(x-y)\{x^4+y^4+z^4+2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2+2xy(x^2+y^2-z^2)\}$
$=(x-y)\{(x^2+y^2-z^2)^2+2xy(x^2+y^2-z^2)\}$
$=(x-y)(x^2+y^2-z^2)(x^2+y^2-z^2+2xy)=0$
$\therefore\ x=y$인 이등변 삼각형 또는 z가 빗변인 직각 삼각형
($\because x^2+y^2-z^2+2xy=(x+y)^2-z^2$에서 삼각형의 변인 $x,\ y,\ z$는 $x+y\neq z$)