1. $a>0,\ b>0$ 일 때, $\sqrt{2(a+b)},\ \sqrt{a}+\sqrt{b}$ 의 대소를 바르게 나타낸 것은?

① $\sqrt{2(a+b)} < \sqrt{a}+\sqrt{b}$
② $\sqrt{2(a+b)} \le \sqrt{a}+\sqrt{b}$
③ $\sqrt{2(a+b)} > \sqrt{a}+\sqrt{b}$
④ $\sqrt{2(a+b)} \ge \sqrt{a}+\sqrt{b}$
⑤ $\sqrt{2(a+b)} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$

해설

$(\sqrt{2(a+b)})^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$
$=2(a+b)-(a+2\sqrt{a}\sqrt{b}+b)$
$=a-2\sqrt{a}\sqrt{b}+b$
$=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\ge 0$
(단, 등호는 $a=b$ 일때 성립)

따라서 $\sqrt{2(a+b)} \ge \sqrt{a}+\sqrt{b}$

2. $2a+3b=12$를 만족하는 양수 a, b에 대하여 ab의 최댓값을 구하면?

① 12　② 8　③ 7　④ 6　⑤ 4

해설

$12=2a+3b \geq 2\sqrt{6ab}$

$6 \geq \sqrt{6ab},\ 36 \geq 6ab \quad \therefore 6 \geq ab$

3. 양수 a, b, c에 대하여 $a+b+c=9$일 때 abc의 최댓값은?

① 19　② 21　③ 23　④ 25　⑤ 27

해설

$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$에서 $9 \geq 3\sqrt[3]{abc}$,

$3 \geq \sqrt[3]{abc}$,　$27 \geq abc$

4. 실수 x, y가 $x^2+y^2=5$를 만족할 때, $x+2y$의 최댓값 M, 최솟값 m의 합 $M+m$을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의해

$(1^2+2^2)(x^2+y^2) \geq (x+2y)^2$

$(x+2y)^2 \leq 5 \cdot 5$

$\therefore -5 \leq x+2y \leq 5$이므로

$x+2y$의 최댓값 $M=5$, 최솟값 $m=-5$

$\therefore \ M+n=5+(-5)=0$

5. n이 자연수 일 때, $2^{10n}, 1000^n$ 의 대소를 비교하면?

① $2^{10n} < 1000^n$ ② $2^{10n} \le 1000^n$ ③ $2^{10n} > 1000^n$

④ $2^{10n} \ge 1000^n$ ⑤ $2^{10n} = 1000^n$

해설

$2^{10n} > 0,\ 1000^n > 0$이고, n이 자연수이므로

$$\frac{2^{10n}}{1000^n} = \frac{(2^{10})^n}{1000^n} = \left(\frac{2^{10}}{1000}\right)^n = \left(\frac{1024}{1000}\right)^n > 1$$

$\therefore 2^{10n} > 1000^n$

6. 부등식 $|x+y| \le |x|+|y|$ 에서 등호가 성립할 필요충분조건은?

① $x=y$ ② $xy>0$ ③ $xy \ge 0$

④ $x \ge 0,\ y \ge 0$ ⑤ $x \le 0,\ y \le 0$

해설

$|x+y| = |x|+|y|$ 의 양변을 제곱하여 정리하면

$xy = |xy|$

(i) $xy = |xy| \quad \Rightarrow \quad xy \ge 0$

(ii) 또 $xy>0$ 이면 $x,\ y$ 는 같은 부호이므로 등식이 성립한다.

$xy=0$ 이면 등호가 성립한다.

따라서, $xy \ge 0 \quad \Rightarrow \quad xy = |xy|$

(i), (ii) 에서

$xy = |xy| \Leftrightarrow xy \ge 0$

7. 두 양수 a, b에 대하여 다음 설명 중 <u>틀린</u> 것은?

① a, b의 산술 평균은 $\dfrac{a+b}{2}$이다.

② $\sqrt{ab}$는 a, b의 기하평균이다.

③ $a+b \geq 2\sqrt{ab}$은 절대부등식이다.

④ $\dfrac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$이면 반드시 $b = \dfrac{1}{a}$이다.

⑤ $a + \dfrac{1}{a} \geq 2$는 항상 성립한다.

해설

$\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \cdots$ 절대부등식

$\dfrac{a+b}{2}$: 산술평균, $\sqrt{ab}$: 기하평균

④: 절대부등식의 등호는 $a = b$일 때 성립한다.

8. $a>0$ 일 때, $x=\sqrt{a^2+1}$과 $y=a+\dfrac{1}{2a}$의 대소를 비교한 것으로 옳은 것은?

① $x \le y$ ② $x < y$ ③ $x \ge y$ ④ $x > y$ ⑤ $x = y$

해설

$x^2=a^2+1$

$y^2=\left(a+\dfrac{1}{2a}\right)^2=a^2+1+\dfrac{1}{4a^2}$,

$\dfrac{1}{4a^2}>0$이므로 $y^2>x^2$

$\therefore y>x$

9. 다음 [보기] 중 항상 옳은 것을 모두 고르면?(단, a, b, c 는 실수)

보기

㉠ $\frac{a}{b^2} < \frac{c}{b^2}$ 이면 $a < c$

㉡ $a > b$ 이면 $ac > bc$

㉢ $a < b < 0$ 이면 $a^2 > ab$

㉣ $|a| + |b| > |a + b|$

㉤ $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

① ㉠, ㉤ ② ㉡, ㉣, ㉠ ③ ㉢, ㉣

④ ㉠, ㉢, ㉤ ⑤ ㉠, ㉣, ㉤

해설

㉠ $\frac{a}{b^2} < \frac{c}{b^2}$

$\Rightarrow$ 양변에 b^2 을 곱하면

$a < c \ (\because b^2 > 0)$

㉡ $a > b$ 이면 $ac > bc$

반례 : $c \leq 0$ 인 경우 : 틀림

㉢ $a^2 - ab = a(a - b) > 0$

㉣ $(|a| + |b|)^2 - |a + b|^2$

$= 2|ab| - 2ab \geq 0$

$\therefore |a| + |b| \geq |a + b|$: 틀림

㉤ $a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca)$

$= \frac{1}{2}\left\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\right\} \geq 0$

$\therefore a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

10. 서로 다른 두 양수 a, b 에 대하여 다음 중 <u>옳은</u> 것은? (단, $a \neq b$)

① $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$ ② $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$

③ $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{2ab}{a+b}$ ④ $\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab} \leq \frac{2ab}{a+b}$

⑤ $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$

해설

$a > 0$, $b > 0$ 일 때, 산술·기하·조화·평균의 관계에서

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$ (등호는 $a = b$ 일 때 성립)

그런데 문제의 조건에서 $a \neq b$ 이므로

$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$

11. $a>0,\ b>0$ 일 때, $(2a+b)\left(\dfrac{8}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 25

해설

$$(2a+b)\left(\frac{8}{a}+\frac{1}{b}\right)=16+1+\frac{8b}{a}+\frac{2a}{b}$$

$a>0,\ b>0$ 이므로 $\dfrac{8b}{a}+\dfrac{2a}{b}\geq 2\sqrt{\dfrac{8b}{a}\cdot\dfrac{2a}{b}}=8$

$\therefore$ 최솟값은 $17+8=25$

12. $a > 0$, $b > 0$, $a + b = 4$일 때, ab 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$a > 0$, $b > 0$일 때,
$a + b \geq 2\sqrt{ab}$이므로
$a + b = 4 \geq 2\sqrt{ab}$, $0 \leq ab \leq 4$
따라서 ab의 최댓값은 4

13. $a > 0,\ b > 0$일 때, $(a+b)\left(\frac{4}{a}+\frac{9}{b}\right)$의 최솟값을 구하면?

① 13 ② 24 ③ 25 ④ 28 ⑤ 36

해설

$a > 0,\ b > 0$이므로 산술기하평균의 관계로부터

$$(a+b)\cdot\left(\frac{4}{a}+\frac{9}{b}\right) = 4 + \frac{9a}{b} + \frac{4b}{a} + 9$$

$$\frac{9a}{b} + \frac{4b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{9a}{b}\cdot\frac{4b}{a}} = 2\cdot 6 = 12$$

$$\therefore (a+b)\left(\frac{4}{a}+\frac{9}{b}\right) \geq 12 + 13 = 25$$

14. 한 자리의 자연수 $l,\ m,\ n$에 대하여 $\{l,\ m,\ n\}=\{p,\ q,\ r\}$가 성립한다고 한다. 이 때, $\dfrac{l}{p}+\dfrac{m}{q}+\dfrac{n}{r}$의 최소값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\frac{l}{p}+\frac{m}{q}+\frac{n}{r}\geq 3\times 3\sqrt{\frac{l}{p}\times\frac{m}{q}\times\frac{n}{r}}$$

그런데 $\{l, m,\ n\}=\{p, q, r\}$이므로

$lmn=pqr$이다.

따라서, $\dfrac{l}{p}+\dfrac{m}{q}+\dfrac{n}{r}\geq 3$

(단, 등호는 $l=p,\ m=q,\ n=r$일 때 성립)

$\therefore$구하는 최소값은 3

15. $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$일 때, $\dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{b} + \dfrac{a}{c}$의 최솟값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 3

해설

산술-기하평균 부등식에 의해

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{b}{a} \times \frac{c}{b} \times \frac{a}{c}} = 3$$

$$\therefore \ \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq 3$$

16. $a>0$, $b>0$, $c>0$일 때, $\frac{2b}{a}+\frac{2c}{b}+\frac{2a}{c}$의 최소값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

산술-기하평균 부등식에 의해,

$$\frac{2b}{a}+\frac{2c}{b}+\frac{2a}{c}\geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{2b}{a}\times\frac{2c}{b}\times\frac{2a}{c}}=3\times 2=6$$

$$\therefore\ \frac{2b}{a}+\frac{2c}{b}+\frac{2a}{c}\geq 6$$

17. 부등식 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \le 24$를 만족시키는 실수 x, y, z에 대하여 $x - 2y + 3z$의 최솟값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -12

해설

코시-슈바르츠 부등식을 이용하면

$(x - 2y + 3z)^2$

$= \left\{x + \sqrt{2}(-\sqrt{2}y) + \sqrt{3}(\sqrt{3}z)\right\}^2$

$\le \left\{1^2 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2\right\}$

$\left\{x^2 + (-\sqrt{2}y)^2 + (\sqrt{3}z)^2\right\}$

$= 6(x^2 + 2y^2 + 3z^2) \le 144$

$\therefore\ -12 \le x - 2y + 3z \le 12$

따라서, 구하는 최솟값은 -12이다.

(참고) 위의 부등식에서 $\dfrac{x}{1} = \dfrac{-\sqrt{2}y}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}z}{\sqrt{3}}$,

$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 24$

즉, $x = -y = \pm 2$일 때 등식이 성립한다.

18. 두 실수 x, y의 제곱의 합이 10일 때, $x+3y$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 한다. 이 때, $M-m$의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 20

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해

$(1^2+3^2)(x^2+y^2) \geq (x+3y)^2$

$x^2+y^2=10$이므로 $100 \geq (x+3y)^2$

$\therefore\ -10 \leq x+3y \leq 10$

$\therefore\ M=10,\ m=-10$

$\therefore\ M-m=10-(-10)=20$

19. $a > 1$일 때 $b = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$, $c = \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{b}\right)$이라 한다. a, b, c의 대소 관계로 옳은 것은?

① $a > b > c$ ② $a > c > b$ ③ $b > c > a$

④ $b > a > c$ ⑤ $c > b > a$

해설

$$b - a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) - a = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} - a\right)$$

그런데, $a > 1$이므로 $\frac{1}{a} - a < 0 \quad \therefore\ b < a$

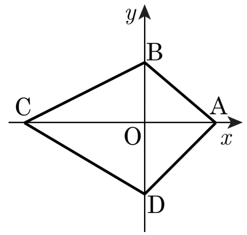
또, $b = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) > \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 1 \ \left(\because\ a \neq \frac{1}{a}\right)$

$$c - b = \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{b}\right) - b = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} - b\right) < 0$$

$\therefore\ c < b$

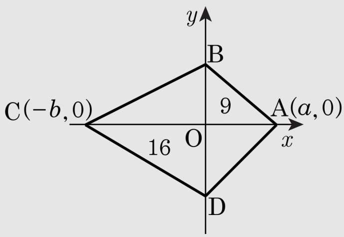
$\therefore\ a > b > c$

20. 좌표평면의 좌표 축 위에 아래 그림과 같이 네 점 A, B, C, D를 잡아 사각형 ABCD를 그린다. $\triangle$OAB와 $\triangle$OCD의 넓이가 각각 9, 16이다. 사각형 ABCD의 넓이의 최소값은?



① 37 ② 40 ③ 43 ④ 46 ⑤ 49

해설



A$(a,\ 0)$이면, B$\left(0,\ \dfrac{18}{a}\right)$이고,

C$(-b,\ 0)$이면 D$\left(0,\ -\dfrac{32}{b}\right)$이다.

($\because$ $a>0,\ b>0$)

(□ABCD의 넓이)

$$=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AC}}\cdot\overline{\mathrm{BD}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(a+b)\cdot\left(\frac{18}{a}+\frac{32}{b}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 50+\left(\frac{9b}{a}+\frac{16a}{b}\right)$$

$a>0,\ b>0$이므로,

산술기하평균을 이용하면,

$$\square\mathrm{ABCD}\geq 25+2\cdot\sqrt{\frac{9b}{a}\times\frac{16a}{b}}=49$$