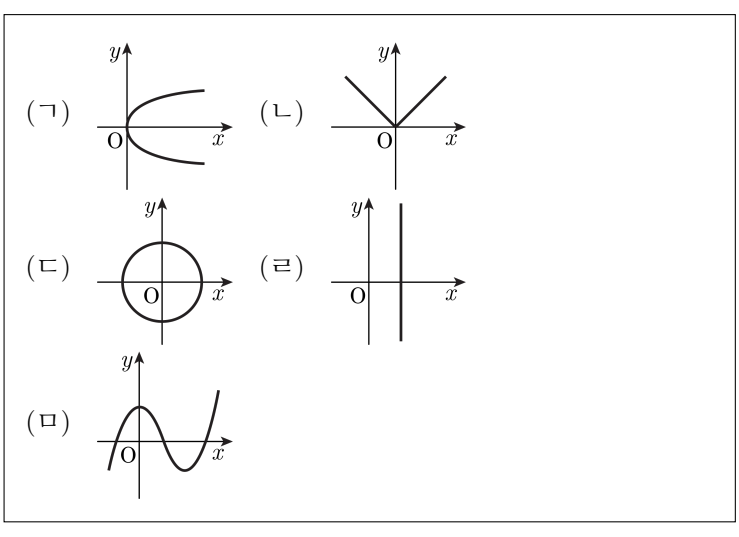
1. 다음의 곡선 중 $f : x \to y$ 인 함수의 그래프가 되는 것을 모두 고르면?



① (ㄴ), (ㄷ)　② (ㄴ), (ㄹ)

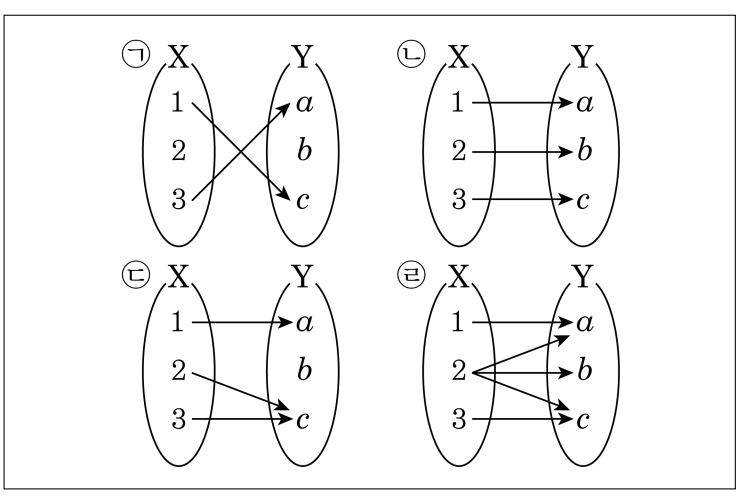
③ (ㄴ), (ㅁ)　④ (ㄴ), (ㄹ), (ㅁ)

⑤ (ㄱ), (ㄴ), (ㄷ), (ㄹ), (ㅁ)

해설

(ㄱ) $x > 0$ 인 x 에 대하여 y 가 두 개씩 대응하므로 함수의 그래프가 아니다.
(ㄴ) 모든 x 에 대하여 y 가 하나씩 대응하므로 함수의 그래프가 된다.
(ㄷ) 정의역 안에 있는 x 에 대하여 y 가 하나 또는 두 개씩 대응하므로 함수가 아니다.
(ㄹ) 어떤 x 에 대해서는 무수히 많은 y 가 대응하므로 함수가 아니다.
(ㅁ) 모든 x 에 대하여 y 가 하나씩 대응하므로 함수가 된다.

2. 다음 대응 관계 중 X에서 Y로의 함수인 것을 모두 고른 것은?



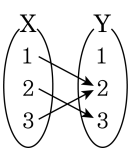
① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉡, ㉢

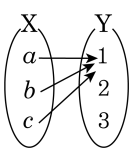
④ ㉠, ㉢, ㉣ ⑤ ㉡, ㉢, ㉣

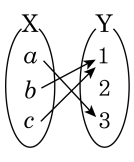
해설

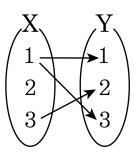
㉠ X의 원소 2에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.
㉡, ㉢ X의 각 원소에 Y의 원소가 하나씩만 대응하므로 함수이다.
㉣ X의 원소 2에 대응하는 Y의 원소가 a, b, c의 3개이므로 함수가 아니다.

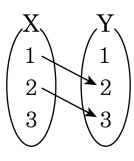
3. 다음 대응 중 X에서 Y로의 함수가 아닌 것을 모두 고르면?

① 

② 

③ 

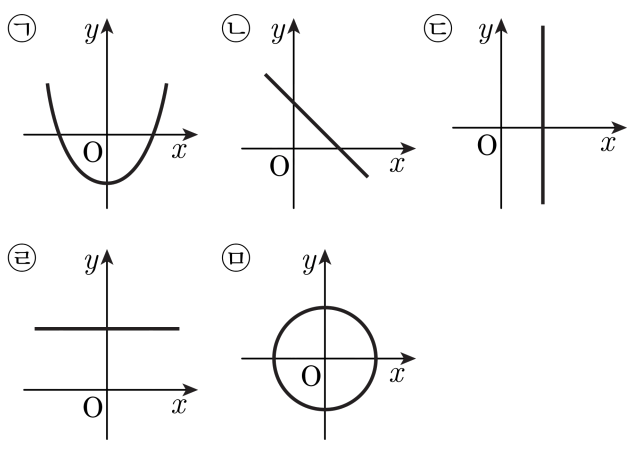
④ 

⑤ 

해설

④ X의 원소 1에 대응되는 Y의 원소는 2개이고 X의 원소 2에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.
⑤ X의 원소 3에 대응되는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

4. 다음 그래프 중 함수인 것은 모두 몇 개인가?

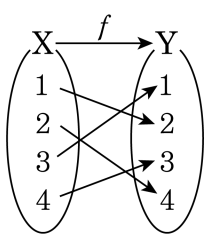


① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

주어진 그래프가 함수가 되기 위해서는 집합 X의 각 원소 x의 함수값 $f(x)$가 하나로 결정되어야 한다. 그러나 ㉢, ㉤은 x의 함수값 $f(x)$가 두개 이상인 점이 존재하므로 함수가 될 수 없다.

5. 다음 그림과 같은 대응에 대한 다음 설명 중 옳지 <u>않은</u> 것은?



① 함수이다.

② 정의역은 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 이다.

③ 공역은 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 이다.

④ 치역은 $\{1,\ 2,\ 4\}$ 이다.

⑤ 일대일 대응이다.

해설

① 주어진 대응 x의 각 원소에 y가 1개씩 대응 하므로 함수이다.
②, ③ 정의역과 공역은 모두 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$이다.
④ 치역은 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$이다.
⑤ 집합 X의 각 원소에 대한 함숫값이 모두 다르므로 일대일대응이다.

6. 두 집합 $X = \{0, 1, 2\}$, $Y = \{-1, 0, 1, 2\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 f가 $f(x) = 2x^2 - 3x$ 일 때, 함수 f의 치역을 구하면?

① $\{-1, 1\}$ ② $\{-1, 0, 1\}$ ③ $\{0, 1, 2\}$

④ $\{-1, 0, 2\}$ ⑤ $\{-1, 0, 1, 2\}$

해설

$f(x) = 2x^2 - 3x$이므로
$f(0) = 0$, $f(1) = -1$, $f(2) = 2$
따라서 치역은 $\{-1, 0, 2\}$

7. 실수 전체의 집합을 정의역과 공역으로 하는 함수 f가 $f(x) = \begin{cases} x & (x\text{는 유리수}) \\ 1-x & (x\text{는 무리수}) \end{cases}$ 과 같을 때 $f\left(\sqrt{2}\right) + f\left(1-\sqrt{2}\right)$ 의 값은 얼마인지 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$\sqrt{2}$와 $1-\sqrt{2}$는 모두 무리수이므로,
$f(\sqrt{2}) = 1-\sqrt{2}$
$f(1-\sqrt{2}) = 1-(1-\sqrt{2}) = \sqrt{2}$
$\therefore\ f(\sqrt{2}) + f(1-\sqrt{2}) = (1-\sqrt{2}) + \sqrt{2} = 1$

8. 다음 (　　)안에 알맞은 말을 써라.

> 함수 $f(x)$ 의 치역과 공역이 같고, 정의역의 서로 다른 원소에 치역의 서로 다른 원소가 대응할 때, 이 함수를 (　　)이라고 한다.

▶ 답 :

▷ 정답 : 일대일대응

해설

9. 다음 중 항등함수를 찾으면?

① $f(x) = x$ ② $f(x) = x + 1$ ③ $f(x) = x - 1$

④ $f(x) = x^2$ ⑤ $f(x) = x^2 + 1$

해설

항등함수는 $f(x) = x$ 또는 $y = x$ 이다.

10. 집합 $X = \{-1,\ 0,\ 1\}$에 대하여 다음 중 X에서 X로의 항등함수를 모두 고른 것은 무엇인가?

$$f(x) = x, \quad g(x) = |x|$$
$$h(x) = x^3, \quad k(x) = \frac{|x+1| - |x-1|}{2}$$

① f ② $f,\ h$ ③ $f,\ g,\ h$
④ $f,\ h,\ k$ ⑤ $g,\ h,\ k$

해설

$f : f(-1) = -1,\ f(0) = 0,\ f(1) = 1$이므로
항등함수이다.
$g : g(-1) = 1$이므로 항등함수가 아니다.
$h : h(-1) = -1,\ h(0) = 0,\ h(1) = 1$이므로
항등함수이다.
$k : k(-1) = -1,\ k(0) = 0,\ k(1) = 1$이므로
항등함수이다.
따라서 항등함수인 것은 $f,\ h,\ k$이다.

11. 두 함수 $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = -3x + 2$ 의 합성함수 $g \circ f$ 를 구하면 무엇인가?

① $y = -6x - 1$ ② $y = -6x$ ③ $y = -6x + 1$

④ $y = -6x + 3$ ⑤ $y = -6x + 5$

해설

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = -3(2x + 1) + 2 = -6x - 1$ 이다.

12. 두 함수 $f(x)=x^2$, $g(x)=x+2$에 대하여 $(f\circ g)(x)$를 구하면?

① $(f\circ g)(x)=(x+2)^2$ ② $(f\circ g)(x)=x^2+2$

③ $(f\circ g)(x)=(x-2)^2$ ④ $(f\circ g)(x)=x^2-2$

⑤ $(f\circ g)(x)=-x^2+2$

해설

두 함수 $f(x)=x^2$, $g(x)=x+2$에 대하여

$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+2) = (x+2)^2$

13. 두 함수 $f(x)=x+3$, $g(x)=2x-1$ 에 대하여 $(f\circ g)(x)$ 를 구하면?

① $(f\circ g)(x)=2x+5$ ② $(f\circ g)(x)=2x+2$

③ $(f\circ g)(x)=x$ ④ $(f\circ g)(x)=-x+1$

⑤ $(f\circ g)(x)=3x-4$

해설

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x-1)=(2x-1)+3=2x+2$

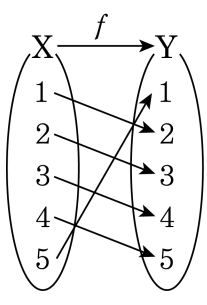
14. 함수 $f(x) = x^2 + x - 2$ 에 대하여 $f(f(1)) + f(f(-2))$ 의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$f(x) = (x-1)(x+2)$ 에서
$f(1) = 0, f(-2) = 0, f(0) = -2$ 이고
$f(f(1)) = f(f(-2)) = f(0)$ 이다.
$\therefore f(f(1)) + f(f(-2)) = 2f(0) = -4$

15. 다음 그림과 같이 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$이고, 함수 $f : X \to X$ 에 대하여 $(f \circ f)(a) = 3$ 이 되는 a의 값은?



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(f(a)) = 3$ 이므로 $f(a) = 2$
$\therefore\ a = 1$

16. 두 함수 $f(x)=3x+1$, $g(x)=4x+a$에 대하여 $(g\circ f)(x)=12x+7$이 성립할 때, 상수 a의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

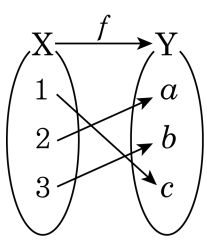
$f(x)=3x+1,\ g(x)=4x+a$ 이므로

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x)&=g(f(x))=g(3x+1)\\&=4(3x+1)+a\\&=12x+4+a\end{aligned}$$

따라서 $12x+4+a=12x+7$ 에서 $4+a=7$

$\therefore\ a=3$

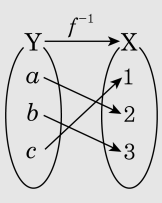
17. 두 집합 $X=\{1,2,3\}$, $Y=\{a,b,c\}$에 대하여 함수 $f: X \to Y$가 그림과 같이 주어질 때, $f^{-1}(a)+f^{-1}(c)$의 값은 얼마인가?



① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

역함수 f^{-1} 는 그림과 같으므로



$f^{-1}(a)+f^{-1}(c)=2+1=3$

18. 함수 $y = x - 2$의 역함수를 구하면 무엇인가?

① $y = x - 2$　② $y = x + 2$　③ $y = -x - 2$

④ $y = -x + 2$　⑤ $y = \frac{1}{2}x - 1$

해설

$y = x - 2$를 x에 관해서 풀면

$x = y + 2$

x와 y를 바꾸면 $y = x + 2$

19. 다음 그림의 함수 f 에 대하여 $f^{-1}(1) + f^{-1}(2)$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(2) = 1, \quad f(1) = 2 \Rightarrow f^{-1}(1) = 2, \quad f^{-1}(2) = 1$

$\therefore \ f^{-1}(1) + f^{-1}(2) = 2 + 1 = 3$

20. 함수 $y = 2x - 2$ 의 역함수를 구하면?

① $y = \frac{1}{2}x - 1$ ② $y = \frac{1}{2}x + 1$ ③ $y = -\frac{1}{2}x + 1$
④ $y = -\frac{1}{2}x - 1$ ⑤ $y = -\frac{1}{2}x + 2$

해설

$y = 2x - 2$, $x = \frac{1}{2}y + 1$ x, y 를 바꿔주면

$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}x + 1$

21. 함수 $f(x) = 2ax - a + 2$에 대하여 $f^{-1}(-7) = 2$일 때, 상수 a의 값은 얼마인가?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$f^{-1}(-7) = 2$이므로
역함수의 정의에 의해서
$f(2) = -7$, $f(2) = 2a \times 2 - a + 2 = -7$, $3a = -9$
$\therefore a = -3$

22. 두 함수 f, g 가 $f(2)=3$, $g^{-1}(1)=4$ 일 때, $f^{-1}(3)+g(4)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$f(2)=3$ 에서 $f^{-1}(3)=2$ 이고
$g^{-1}(1)=4$ 에서 $g(4)=1$ 이므로
$f^{-1}(3)+g(4)=2+1=3$

23. 함수 $f(x) = 2x - 3$ 에 대하여 $f^{-1}(2)$ 의 값은?

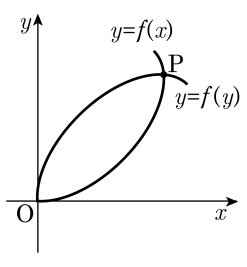
① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

해설

$f^{-1}(2) = a$ 라 하면, $f(a) = 2$ 이므로 $2a - 3 = 2$

$\therefore\ a = \frac{5}{2}$

24. 다음 그림과 같은 두 곡선 $y = f(x)$ 와 $x = f(y)$ 의 교점 P 가 될 수 있는 점은 무엇인가?



① $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$ ② $\left(1,\ \frac{3}{2}\right)$

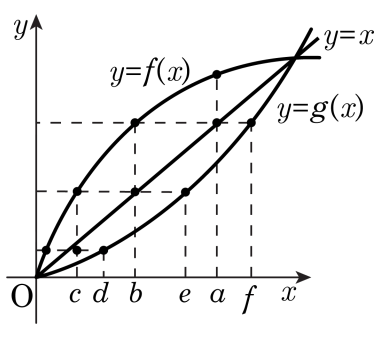
③ $(1,\ 2)$ ④ $(2,\ 2)$

⑤ $(2,\ 3)$

해설

$y = f(x)$ 와 $x = f(y)$ 는
서로 역함수의 관계이므로 두 그래프의
교점 P 는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와
직선 $y = x$ 의 교점과 같다.
따라서 점 P 는 직선 $x = y$ 위의 점이므로
$(2,\ 2)$ 이다.

25. 다음 그림은 세 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=x$의 그래프이다. 이때, $(f\circ f\circ g)^{-1}(a)$의 값은?

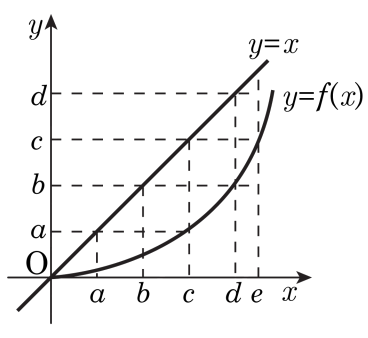


① a ② b ③ c ④ d ⑤ e

해설

$(f\circ f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}\circ f^{-1}\cdots\cdots$㉠이고
$f^{-1}(a)=k$라 하면 $f(k)=a$에서 $k=b$
$\therefore\ f^{-1}(a)=b\cdots\cdots$㉡
$f^{-1}(b)=l$이라 하면 $f(l)=b$에서 $l=c$
$\therefore\ f^{-1}(b)=c\cdots\cdots$㉢
$g^{-1}(c)=m$이라 하면 $g(m)=c$에서 $m=d$
$\therefore\ g^{-1}(c)=d\cdots\cdots$㉣
㉠, ㉡, ㉢, ㉣에서
$$\begin{aligned}(f\circ f\circ g)^{-1}&=(g^{-1}\circ f^{-1}\circ f^{-1})(a)\\&=g^{-1}[f^{-1}\{f^{-1}(a)\}]\\&=g^{-1}\{f^{-1}(b)\}=g^{-1}(c)=d\end{aligned}$$

26. 함수 $y = f(x)$의 그래프와 직선 $y = x$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, $(f \circ f)^{-1}(a)$의 값은 얼마인가?

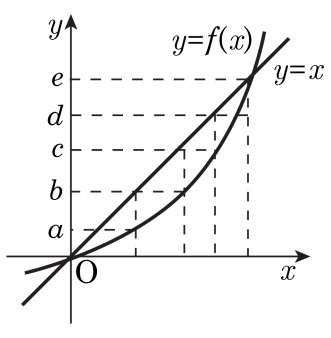


① a ② b ③ c ④ d ⑤ e

해설

$(f \circ f)^{-1}(a) = (f^{-1} \circ f^{-1})(a)$
$= f^{-1}(f^{-1}(a)) \cdots ㉠$
$f^{-1}(a) = m$으로 놓으면 $f(m) = a$이고,
그래프에서 $f(c) = a$이므로 $m = c$
$\therefore f^{-1}(a) = c$
이 때, ㉠에서
$(f \circ f)^{1}(a) = f^{-1}(f^{-1}(a)) = f^{-1}(c) \cdots ㉡$
또, $f^{-1}(c) = n$으로 놓으면 $f(n) = c$이고
그래프에서 $f(e) = c$이므로 $n = e$
$\therefore f^{-1}(c) = e$
따라서, ㉡에서
$(f \circ f)^{-1}(a) = f^{-1}(f^{-1}(a)) = f^{-1}(c) = e$

27. 다음 그림은 두 함수 $y=f(x)$와 $y=x$의 그래프이다. $(f\cdot f)^{-1}(b)$의 값은?



① a ② b ③ c ④ d ⑤ e

해설

$(f\cdot f)^{-1}(b)=(f^{-1}\cdot f^{-1})(b)$
$=f^{-1}(f^{-1}(b))$
$f^{-1}(b)=k$라고 하면, $f(k)=b$
$\therefore\ k=c$
$\therefore\ f^{-1}(f^{-1}(b))=f^{-1}(c)$
또, $f^{-1}(c)=t$라고 하면, $f(t)=c$
$\therefore\ t=d$
$\therefore\ (f\cdot f)^{-1}(b)=d$