1. 방정식 $(a^2-3)x-1=a(2x+1)$ 의 해가 존재하지 않기 위한 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(a^2-2a-3)x=a+1$

$(a-3)(a+1)x=a+1$

$\therefore a=3$ 이면 해가 없다.

2. $|x-1| = 3 - \sqrt{x^2}$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : -1

해설

$|x-1| = 3 - |x|$ 에서,
$|x| + |x-1| = 3$ 이다.
i) $x < 0$ 일 때,
$-x - (x-1) = 3$
$\therefore x = -1$
ii) $0 \le x < 1$ 일 때,
$x - (x-1) = 3$
$0 \cdot x + 1 = 3$ 이므로 불능
iii) $x \ge 1$ 일 때,
$x + (x-1) = 3$
$\therefore x = 2$
따라서 구하는 해는
$x = -1$ 또는 $x = 2$ 이다.

3. x에 대한 방정식 $ix^2+(1+i)x+1=0$의 해를 구하여라. (단, $x \neq i$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

양변에 $-i$를 곱하면

$(-i)\cdot ix^2-i(1+i)x-i=0$

$x^2+(1-i)x-i=0$

$(x-i)(x+1)=0$

$x \neq i$이므로 $x=-1$

4. x에 대한 이차방정식 $x^2+px+q=0$의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이 되도록 유리수 p,q를 정할 때, $p+q$의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ 1 ⑤ 2

해설

유리계수 이차식의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이면,
그 켤레근인 $2-\sqrt{3}$도 방정식의 근이므로
근과 계수와의 관계에 의해서
$-p=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$
$\therefore\ p=-4$
$q=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1$
$\therefore\ q=1$
$\therefore\ p+q=-4+1=-3$

5. 방정식 $x^2-4x+y^2-8y+20=0$을 만족하는 실수 $x,\ y$에 대하여 $x+y$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

$x^2-4x+y^2-8y+20=(x-2)^2+(y-4)^2=0$

$\therefore\ x=2,\ y=4$

$\therefore\ x+y=6$

해설

$x^2-4x+y^2-8y+20=0$이 실근을 가지므로

$D/4=4-(y^2-8y+20)\geq 0$

$y^2-8y+16\leq 0$

$(y-4)^2\leq 0,\ y=4$

준식에 대입하면 $x=2$

따라서 $x+y=6$

6. x에 대한 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 다음 [보기]의 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖는 것을 모두 고른 것은?

㉠ $ax^2+2bx+c=0$	㉡ $ax^2+\frac{1}{2}bx+c=0$
㉢ $cx^2+bx+a=0$	

① ㉠　② ㉠, ㉡　③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로
$D=b^2-4ac>0\cdots$
㉠ $ax^2+2bx+c=0$의 판별식은
$D=(2b)^2-4ac=4b^2-4ac$
$=3b^2+(b^2-4ac>0)$
따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.
㉡ [반례] $a=1,\ b=3,\ c=2$일 때
$x^2+3x+2=0$은 서로 다른 두 실근을 갖지만
$x^2+\frac{3}{2}x+2=0$은 허근을 갖는다.
㉢ $cx^2+bx+a=0$의 판별식은
$D=b^2-4ac>0$
따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

7. 이차방정식 $2x^2-4x-3k=0$이 허근을 갖고, 동시에 $x^2+5x-2k=0$이 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수를 구하면?

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

$2x^2-4x-3k=0$이 허근을 가질 조건은

$\frac{D}{4}=4+6k<0$

$\therefore\ k<-\frac{2}{3}$ ……㉠

$x^2+5x-2k=0$이 실근을 가질 조건은

$D=25+8k\geq 0$

$\therefore\ k\geq -\frac{25}{8}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $-\frac{25}{8}\leq k<-\frac{2}{3}$

따라서, 정수 $k=-3,\ -2,\ -1$

$\therefore$ 정수 k의 개수는 3개

8. x에 대한 이차방정식 $x^2+(2m+a+b)x+m^2+ab=0$이 m의 값에 관계없이 항상 중근을 가질 때, 실수 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^2+(2m+a+b)x+m^2+ab=0$

항상 중근을 가질 조건 : 판별식 $D=0$

$D=(2m+a+b)^2-4(m^2+ab)=0$

$4m^2+a^2+b^2+4ma+2ab+4mb-4m^2-4ab=0$

m에 관해 식을 정리하면

$(4a+4b)m+(a^2-2ab+b^2)=0$

$4a+4b=0,\quad a^2-2ab+b^2=0$

$\therefore a+b=0$

9. $4x^2 - 8x + 7$ 을 복소수 범위에서 인수분해하면?

① $(2x-2-\sqrt{3}i)(2x-2+\sqrt{3}i)$

② $(2x+2-\sqrt{3}i)(2x-2+\sqrt{3}i)$

③ $(x-2-\sqrt{3}i)(x+2+\sqrt{3}i)$

④ $(x-2-\sqrt{3}i)(x-2+\sqrt{3}i)$

⑤ $\left(x-\frac{2+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x-\frac{2-\sqrt{3}i}{2}\right)$

해설

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16-28}}{4}=1\pm\frac{2\sqrt{3}i}{4}=1\pm\frac{\sqrt{3}i}{2}$$

$$4\left(x-1-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$=(2x-2-\sqrt{3}i)(2x-2+\sqrt{3}i)$$

10. 이차방정식 $x^2+4x+a=0$ 의 한 근이 $b+\sqrt{2}i$ 일 때, ab 의 값은? (단, a, b 는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

① -14 ② -13 ③ -12 ④ -11 ⑤ -10

해설
한 근이 $b+\sqrt{2}i$ 이면 다른 한 근은 $b-\sqrt{2}i$ 이다.
근과 계수와의 관계를 이용하면
$2b=-4,\ b^2+2=a$
$\therefore\ a=6,\ b=-2,\ ab=-12$

11. 다음과 같은 포물선과 직선이 있다.

$y = x^2 + (m-1)x + m^2 + 1$ $y = x + 1$

포물선이 직선보다 항상 위쪽에 존재하도록 m의 범위를 정하여라.

① $m < -2,\ \ m > \dfrac{2}{3}$ ② $m < -1,\ \ m > \dfrac{2}{3}$
③ $m < -2,\ \ m > 2$ ④ $m < 2,\ \ m > \dfrac{2}{3}$
⑤ $m < -5,\ \ m > \dfrac{2}{3}$

해설

$x^2 + (m-1)x + m^2 + 1 > x + 1$을 항상 만족시키도록 m을 정하면 된다.
$x^2 + (m-2)x + m^2 > 0$에서 판별식
$D = (m-2)^2 - 4m^2 < 0,$
$(m-2+2m)(m-2-2m) < 0$
$(3m-2)(m+2) > 0$
$\therefore\ \ m < -2\ ,\ m > \dfrac{2}{3}$

12. 다음 이차함수 중에서 최솟값이 가장 작은 것은?

① $y = 2x^2$

② $y = x^2 + 2x + 1$

③ $y = 2x^2 + 4x + 7$

④ $y = 7x^2 - 2$

⑤ $y = \frac{1}{3}(x+3)^2 - 5$

해설

① $y = 2x^2$: 최솟값은 0 이다.
② $y = x^2 + 2x + 1, y = (x+1)^2$: 최솟값은 0 이다.
③ $y = 2x^2 + 4x + 7 = y = 2(x+1)^2 + 5$: 최솟값은 5 이다.
④ $y = 7x^2 - 2$: 최솟값은 -2 이다.
⑤ $y = \frac{1}{3}(x+3)^2 - 5$: 최솟값은 -5

13. 이차함수 $y = -x^2 - 4x + k$ 의 최댓값이 8 일 때, 상수 k 의 값을 구하면?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$y = -x^2 - 4x + k = -(x+2)^2 + 4 + k$
최댓값이 8 이므로
$4 + k = 8 \quad \therefore k = 4$

14. 이차함수 $y = x^2 + 4x + k$ 의 최솟값이 -4 일 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$y = x^2 + 4x + k$
$= (x+2)^2 - 4 + k$

$x = -2$ 일 때, 최솟값 $-4 + k$ 를 가지므로

$-4 + k = -4 \quad \therefore\ k = 0$

15. $0 \le x \le 3$ 에서 이차함수 $y = -4x^2 + 4x + a$ 의 최댓값과 최솟값의 합이 10 일 때, 상수 a 의 값을 구하면?

① $\frac{11}{2}$ ② 11 ③ $\frac{33}{2}$ ④ 22 ⑤ $\frac{55}{2}$

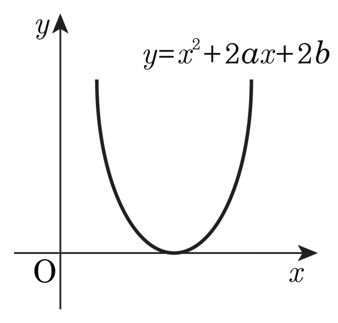
해설

$y = -4x^2 + 4x + a = -4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + a + 1$

$0 \le x \le 3$ 이므로 $x = \frac{1}{2}$ 일 때,
최댓값을 갖고 최댓값은 $a + 1$ 이다.
$x = 3$ 일 때, 최솟값을 갖고
최솟값은 $a - 24$ 이다.
최댓값과 최솟값의 합이 10 이므로
$(a + 1) + (a - 24) = 10$

$\therefore a = \frac{33}{2}$

16. 이차함수 $y = x^2 + 2ax + 2b$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 방정식 $x^2 - 2ax + b^2 + 2 = 0$ 의 근에 대한 설명으로 옳은 것은?



① 서로 다른 양의 실근을 갖는다.

② 서로 다른 음의 실근을 갖는다.

③ 중근을 갖는다.

④ 서로 다른 부호의 실근을 갖는다.

⑤ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

해설

㉠ 그래프에서 중근이므로 $a^2 - 2b = 0$

㉡ $x^2 - 2ax + b^2 + 2 = 0$

판별식 $\frac{D}{4} = a^2 - b^2 - 2 \leftarrow a^2 = 2b$

$= 2b - b^2 - 2$

$= -(b^2 - 2b + 2)$

$= -(b-1)^2 - 1 < 0$

∴ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

17. α, β가 x에 관한 이차방정식 $(x+p)(x+q)-k=0$의 두 근일 때, 다음 방정식의 근은?

$$\boxed{(x-\alpha)(x-\beta)+k=0}$$

① $\alpha,\ \beta$　② $\frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\beta}$　③ $p,\ q$
④ $\frac{1}{p},\ \frac{1}{q}$　⑤ $-p,\ -q$

해설

방정식 $(x+p)(x+q)-k=0$을 정리하면
$x^2+(p+q)x+(pq-k)=0$
이 방정식의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로
$\alpha+\beta=-(p+q),\ \alpha\beta=pq-k \cdots$ ㉮
방정식 $(x-\alpha)(x-\beta)+k=0$을 정리하면
$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta+k=0$
$\therefore\ x^2+(p+q)x+pq=0$ ($\because$ ㉮ 대입)
$\therefore\ (x+p)(x+q)=0$
따라서 구하는 두 근은 $x=-p,\ -q$

18. x에 대한 이차방정식 $3x^2-(2k+5)x+3=0$의 두 근 중 한 근을 α라 할 때, $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=k^2$이 성립한다. 이때, 양수 k의 값을 구하면?

① 2　② $\dfrac{5}{3}$　③ 1　④ $\dfrac{4}{3}$　⑤ 3

해설

두 근의 곱이 1이므로 한 근이 α이면
다른 한 근은 $\dfrac{1}{\alpha}$이다.
$\therefore\ \alpha+\dfrac{1}{\alpha}=k^2=\dfrac{2k+5}{3}$
$\therefore\ 3k^2-2k-5=0$
$k=\dfrac{5}{3}$ 또는 -1
$\therefore$ 양수 $k=\dfrac{5}{3}$

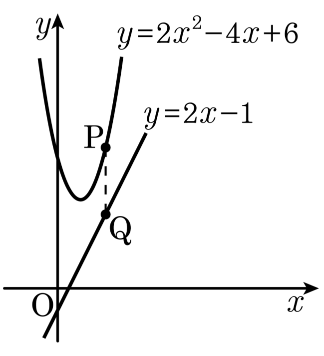
19. $x^2+ax+(a^2+2a-3)=0$의 두 근이 서로 다른 부호를 갖고 양근이 음근의 절댓값보다 작을 때, 상수 a의 범위를 구하면?

① $0<a<1$　② $\frac{1}{2}<a<2$　③ $1\le a<2$
④ $2<a\le 3$　⑤ $-\frac{1}{2}<a<2$

해설

두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면
|음근| > 양근이므로
$\alpha+\beta=-a<0,\ \alpha\beta=a^2+2a-3<0$
$\therefore\ 0<a<1$

20. 다음 그림과 같이 $y = 2x^2 - 4x + 6$ 과 $y = 2x - 1$ 이 y 축에 평행인 직선과 만나는 점을 P, Q 라 할 때, $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 최솟값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{5}{2}$

해설

$\overline{\mathrm{PQ}}$ 가 y 축에 평행하므로 점 P, Q 의 x 좌표는 같다. 이 때, 점 P 의 좌표를 $(t,\ 2t^2 - 4t + 6)$ 이라고 하면, 점 Q 의 좌표는 $(t,\ 2t - 1)$ 이다.

$\overline{\mathrm{PQ}} = 2t^2 - 4t + 6 - (2t - 1) = 2t^2 - 6t + 7 = 2\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}$

$\therefore t = \frac{3}{2}$ 일 때, $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 최솟값은 $\frac{5}{2}$