1. x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} ax - y = a \\ x - ay = 1 \end{cases}$ 이 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 a값은?

① $a = -1$　② $a = 1$

③ $a = \pm 1$　④ $a \neq \pm 1$인 모든 실수

⑤ 없다.

해설

연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면

$\frac{a}{1} \neq \frac{-1}{-a}$, $-a^2 \neq -1$

$\therefore\ a \neq \pm 1$

따라서 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 a의 값은 $a \neq \pm 1$인 모든 실수이다.

2. 연립방정식 $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 을 풀 때, xy의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

해설

$\begin{cases} x-y=1 \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 \cdots ㉡ \end{cases}$

㉡를 곱셈법칙에 의해 변형하면,

$x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$

$5=1^2+2xy$

$\therefore\ xy=2$

3. 연립방정식 $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 \\ x^2+2y^2=12 \end{cases}$ 을 만족하는 $x,\ y$에 대하여 $x+y$ 값이 될 수 없는 것은?

① $3\sqrt{2}$ ② 4 ③ $-3\sqrt{2}$

④ -4 ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$x^2-3xy+2y^2=0$에서

$(x-y)(x-2y)=0 \quad \therefore x=y$ 또는 $x=2y$

i) $x=y$ 일 때

$x^2+2y^2=3x^2=12$

$x=\pm 2,\ y=\pm 2$

ii) $x=2y$일 때

$x^2+2y^2=6y^2=12$

$y=\pm\sqrt{2},\quad x=\pm 2\sqrt{2}$

$\therefore x+y=4,-4,3\sqrt{2},-3\sqrt{2}$

4. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2-xy+y^2=3 \end{cases}$ 의 해를 $x=a,\ y=b$라 할 때, ab의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2+y^2=5 \quad \cdots$ ㉠
$x^2-xy+y^2=3 \quad \cdots$ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $5-xy=3,\ xy=2$
$\therefore \quad ab=2$

5. 집과 A 정류장 사이의 거리를 x m, A 정류장과 B 정류장 사이의 거리를 y m 라고 할 때, 다음에서 (가), (나)를 식으로 나타내면? (단, 걸을 때의 속력은 60m/분 이고, 버스의 속력은 30km/시이다.)

> (가) 집에서 A 정류장까지 걸어가서 3분을 기다린 후, 버스를 타고 B 정류장에 도착하는데 총 10분이 걸렸다.
> (나) 다음 날은 집에서 어제 걸어간 길과 버스를 타고 간 길을 모두 걸어서 B 정류장에 도착하는데 28분이 걸렸다.

① (가)$25x+3y=10500$, (나)$x+y=1680$

② (가)$25x+3y=10500$, (나)$x+y=3360$

③ (가)$25x+3y=15000$, (나)$x+y=1680$

④ (가)$25x+3y=15000$, (나)$x+y=3360$

⑤ (가)$25x+3y=15000$, (나)$x+y=1680$

해설

시속 30 km $\Rightarrow$ 분속 500 m

(가) $\frac{x}{60}+3+\frac{y}{500}=10$, $\frac{x}{60}+\frac{y}{500}=7$

$\therefore\ 25x+3y=10500$

(나) $\frac{x+y}{60}=28$

$\therefore\ x+y=1680$

6. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2+2x=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2+x+y=2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 을 풀면 $x=\alpha,\ y=\beta$ 또는 $x=\gamma,\ y=\delta$ 이다. 이 때, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

인수분해되는 식은 없으나 이차항을 소거할 수 있다.
㉠ − ㉡에서 $x-y=-2$, 즉 $y=x+2$
㉠에 대입하여 정리하면
$x^2+3x+2=0$
$(x+1)(x+2)=0$
$\therefore\ x=-1,\ -2$
$\therefore\ x=-1,\ y=1$ 또는 $x=-2,\ y=0$
$\therefore\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=6$

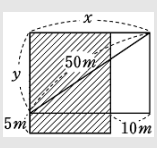
7. 대각선의 길이가 50 m 인 직사각형 모양의 땅이 있다. 이 땅의 세로를 5 m 늘리고, 가로를 10 m 줄이면 넓이가 50 m^2 만큼 늘어난다. 처음 직사각형의 가로의 길이를 구하여라. (단위는 생략할 것)

▶ 답 : m

▷ 정답 : 48 m

해설

처음 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x m, y m 라 하면



$$\begin{cases} x^2+y^2=50^2 \cdots ㉠ \\ (x-10)(y+5)=xy+50 \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡을 정리하면 $5x-10y=100$

$\therefore\ x=2y+20 \quad \cdots ㉢$

㉢을 ㉠에 대입하면

$(2y+20)^2+y^2=50^2$

$y^2+16y-420=0$

$(y-14)(y+30)=0$

$\therefore\ y=14,\ -30$

그런데 $0<y<50$ 이므로 $y=14$

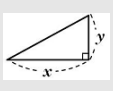
이것을 ㉢에 대입하면 $x=48$

8. 직각 삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이의 합이 21 cm 이고, 빗변의 길이가 15 cm 일 때, 직각을 낀 두 변의 길이 중 긴 변의 길이를 구하시오.

▶ 답 : cm

▷ 정답 : 12 cm

해설



직각을 낀 두 변의 길이를 x, y 라 하면

$\begin{cases} x+y=21 \cdots ① \\ x^2+y^2=15^2 \cdots ② \end{cases}$ 이다.

①에서 $y=21-x$ 를 ②에 대입하면

$x^2+(21-x)^2=15^2$

$x^2+21^2-42x+x^2=15^2$

$2x^2-42x+21^2-15^2=0$

$2x^2-42x+(21+15)(21-15)=0$

$x^2-21x+3\times 36=0$

$(x-12)(x-9)=0$,

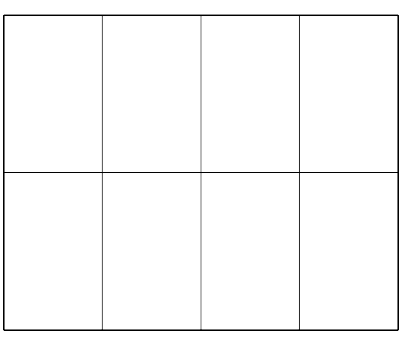
$x=12$ 또는 $x=9$

$x=12$ 일 때 $y=9$

$x=9$ 일 때 $y=12$

따라서 긴 변의 길이는 12 cm 이다.

9. 학교운동장에 길이가 70 m 인 줄을 가지고 다음 그림과 같은 직사각형 모양의 경계선을 표시하려고 한다. 이 때, 바깥 직사각형의 넓이가 80 m^2 이 되도록 하는 바깥 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이의 합은? (단, 가로의 길이는 10 m 이하이다.)



① 16 m ② 17 m ③ 18 m ④ 19 m ⑤ 20 m

해설

운동장의 가로를 x , 세로를 y 라 하자.
$3x + 5y = 70$
$xy = 80$ 연립하여 풀면, $x = 10,\ y = 8$
∴ 가로+세로= 18

10. 두 이차방정식 $ax^2+4x+2=0,\ x^2+ax+1=0$ 이 오직 하나의 공통근을 갖도록 하는 상수 a 의 값을 구하면?

① $-\frac{5}{3}$ ② $-\frac{7}{2}$ ③ $-\frac{5}{2}$ ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{5}{7}$

해설

공통근을 t 라 하면

$at^2+4t+2=0\cdots$㉠

$t^2+at+1=0\cdots$㉡

㉠$-$㉡$\times 2$: $(a-2)t^2+(4-2a)t=0$

$(a-2)t(t-2)=0$

이때, $a=2$ 이면 두 방정식은 서로 같으므로 $a\neq 2$

그런데 $t=0$ 이면 ㉠, ㉡의 해가 존재하지 않으므로 $t=2$

따라서 ㉡에서 $2a+5=0$

$\therefore\ a=-\frac{5}{2}$

11. 방정식 $2x^2+4y^2+4xy+2x+1=0$을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $x+y$의 값을 구하면?

① $-\frac{3}{2}$ ② -1 ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ $-\frac{1}{7}$

해설

$2x^2+4y^2+4xy+2x+1=0$에서
$x^2+4xy+4y^2+x^2+2x+1=0$,
$(x+2y)^2+(x+1)^2=0$
x, y가 실수이므로 $x+2y=0$ ····· ①, $x+1=0$ ····· ②
①, ②에서 $x=-1,\ y=\frac{1}{2}$
$\therefore\ x+y=-\frac{1}{2}$

해설

주어진 방정식을 x에 대하여 정리하면$2x^2+2(2y+1)+(4y^2+1)=0$ ····· ①
x가 실수이므로 $\frac{D}{4}=(2y+1)^2-2(4y^2+1)\geq 0$
$\therefore\ (2y-1)^2\leq 0$
그런데 $2y-1$이 실수이므로 $2y-1=0$
$\therefore\ y=\frac{1}{2}$ ····· ②
②를 ①에 대입하면
$2x^2+4x+2=0,\ (x+1)^2=0$
$\therefore\ x=-1$ ····· ③
②, ③에서 $x+y=-\frac{1}{2}$

12. 두 실수 x, y에 대하여 $x^2-4xy+5y^2+2x-8y+5=0$일 때, $x+y$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^2-4xy+5y^2+2x-8y+5$
$=x^2-2(2y-1)x+4y^2-4y+1+y^2-4y+4$
$=x^2-2(2y-1)x+(2y-1)^2+(y-2)^2$
$=(x-2y+1)^2+(y-2)^2=0$
$\therefore\ x-2y+1=0,\ y-2=0$이므로
$y=2,\ x-4+1=0 \quad \therefore\ x=3$
따라서 $x+y=3+2=5$

13. 이차방정식 $2x^2-5x+k=0$ 의 근이 유리수가 되는 k의 최대 정수값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

근이 유리수이므로, 판별식D ≥ 0 이어야 한다.

$D=25-8k\geq 0$ 곧, $k\leq \frac{25}{8}$ 이어야 한다.

k 는 정수이므로 $k=3,\ 2,\ 1,\ \cdots$ 이고,

이 중 $D\geq 0$ 조건을 만족하는 최대 정수는 $k=3$ 이다.

14. 방정식 $2xy-4x-y=4$를 만족하는 양의 정수 x, y를 구하면 $\begin{cases} x=\alpha \\ y=\beta \end{cases}$,

$\begin{cases} x=\gamma \\ y=\delta \end{cases}$ 이다.

$\alpha+\beta+\gamma+\delta$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 15

해설

주어진 식을 변형하면 $(2x-1)(y-2)=6$
조건에서 x, y가 양의 정수이므로
$2x-1$, $y-2$도 각각 정수이고 특히 $2x-1$은 양의 홀수이다.

$\therefore \begin{cases} 2x-1=1 \\ y-2=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} 2x-1=3 \\ y-2=2 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=8 \end{cases}, \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$

$\therefore \alpha+\beta+\gamma+\delta=15$

15. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=xy \\ \dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=0 \end{cases}$ 을 만족하는 $x,\ y$ 의 합 $x+y$ 의 값은?

(단, $xy \neq 0$)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=0$ 에서

$\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{x^2+y^2}{xy}=\dfrac{(x+y)^2-2xy}{xy}$ 이므로

$x+y=u,\ xy=v$ 라 하면

주어진 연립방정식은

$\begin{cases} u-v=0 & \cdots ㉠ \\ \dfrac{u^2-2v}{v}=0 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면

$\dfrac{u^2-2v}{v}=\dfrac{v(v-2)}{v}=0$

$\therefore\ v=0$ 또는 $v=2$

그런데 주어진 조건에서

$v=xy \neq 0$ 이므로 $v=2$ 이다.

따라서, ㉠에서 $u=v=2$ 이므로

$x+y=2$

16. 연립방정식 $xy = z,\ yz = x,\ zx = y$를 만족하는 0이 아닌 실수해 $x,\ y,\ z$의 쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는?

① 1개　② 2개　③ 4개

④ 8개　⑤ 무수히 많다.

해설

주어진 식을 변변 곱하면 $(xyz)^2 = xyz$

$xyz \neq 0$ 이므로 $xyz = 1$

여기에 $xy = z$를 대입하면 $z^2 = 1,\ z = \pm 1$

(i) $z = 1$을 주어진 연립방정식에 대입하면,

$xy = 1,\ x = y$

$\therefore\ (x,\ y,\ z) = (1,\ 1,\ 1),\ (-1,\ -1,\ 1)$

(ii) $z = -1$을 주어진 연립방정식에 대입하면

$xy = -1,\ x = -y$

$\therefore\ (x,\ y,\ z) = (1,\ -1,\ -1),\ (-1,\ 1,\ -1)$

(i), (ii)에서 조건을 만족하는 $(x,\ y,\ z)$는 모두 4개이다.

17. 세 개의 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$, $bx^2+cx+a=0$, $cx^2+ax+b=0$이 오직 하나의 공통 실근을 가질 때, $a+b+c$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

공통 실근을 α라 하면

$a\alpha^2+b\alpha+c=0$ …(ⅰ)

$b\alpha^2+c\alpha+a=0$ …(ⅱ)

$c\alpha^2+a\alpha+b=0$ …(ⅲ)

(ⅰ)+(ⅱ)+(ⅲ)하면

$(a+b+c)(\alpha^2+\alpha+1)=0$

α가 실수일 때 $\alpha^2+\alpha+1>0$

$\therefore\ a+b+c=0$

18. 각 면에 1부터 12까지 자연수가 하나씩 적힌 정십이면체의 주사위가 있다. 이 주사위를 두 번 던져 나오는 눈의 수를 각각 x, y라 할 때, $xy-3x+2y=18$을 만족하는 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$xy-3x+2y=18,\ x(y-3)+2y=18,$
$x(y-3)+2(y-3)=12$
$(x+2)(y-3)=12$
$x+2\geq 3$이므로
$(x+2,\ y-3)=(3,4),(4,3),(6,2),(12,1)$
$\therefore (x,\ y)=(1,7),(2,6),(4,5).(10,4)$
$\therefore 4$개

19. 방정식 $2x + 5y = 84$를 만족하는 양의 정수 x, y의 해 중에서 x의 최댓값을 구하면?

① 36 ② 37 ③ 38 ④ 39 ⑤ 40

해설

준식을 y에 대하여 정리하면

$$y = \frac{84 - 2x}{5} = \frac{2(42 - x)}{5} \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 y가 양의 정수이므로 $42 - x$가 5의 배수이다.

따라서, $x = 2,\ 7,\ \cdots,\ 37$

$\therefore$ x의 최댓값은 37

20. $x^2+(m-1)x+m+1=0$의 두 근이 정수가 되도록 정수 m의 값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

$x^2+(m-1)x+m+1=0$의 두 근을 α, β라면

$\alpha+\beta=1-m\cdots$㉠, $\alpha\beta=m+1\cdots$㉡

㉠ + ㉡을 하면 $\alpha\beta+\alpha+\beta=2$ (α, β는 정수)

$(\alpha+1)(\beta+1)=3$

$\therefore \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=2\end{cases}$ $\begin{cases}\alpha=-2\\ \beta=-4\end{cases}$ 를 ㉡에 대입하면

$m=-1,\ 7$

21. 대학수학능력시험 수리탐구 영역(Ⅰ)의 문항 수는 30개이고 배점은 40점이다. 문항별 배점은 1점, 1.5점, 2점의 세 종류이다. 각 배점 종류별 문항이 적어도 한 문항씩 포함되도록 하려면 1점짜리 문항은 최소 몇 문항이어야 하는가?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

1점짜리 문항을 x개,
1.5점짜리 문항을 y개,
2점짜리 문항을 z개라고 하면
$x+1.5y+2z=40\cdots$㉠
$x+y+z=30\cdots$㉡
$(x\geq 1,\ y\geq 1,\ z\geq 1)$라고 하면
㉠$\times 2-$㉡$\times 3=-x+z=-10$,
$x=z+10,\ z\geq 1$이므로
$x=z+10\geq 11$
이 때 $y=18$이고 준 조건을 만족하므로
x의 최솟값은 11

22. 200 m 운동장 트랙에서 두 명의 학생이 일정한 속력으로 달리기를 한다. 두 학생이 같은 방향으로 달리면 3분 후에 만나고, 반대 방향으로 달리면 1분 후에 만난다고 할 때, 두 학생 중 빠른 학생의 속력은?

① 8 km/h ② 9 km/h ③ 10 km/h
④ 11 km/h ⑤ 12 km/h

해설

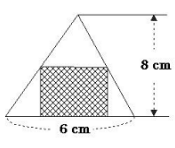
빠른 학생의 분속 : x
3분간 간 거리 : $3x$
느린 학생의 분속 : y
3분간 간 거리 : $3y$
같은 방향으로 3분간 달려간 후 만났으므로
거리의 차는 200
$3x - 3y = 200$
반대방향으로 1분간 달려간 후 만났으므로
거리의 합은 200
$x + y = 200$

$$\begin{cases} 3x - 3y = 200 \\ x + y = 200 \end{cases}$$

연립방정식을 풀면 $x = \frac{400}{3}$ m/분

$\Rightarrow \frac{400\text{m}}{3}$/분$= \frac{0.4\,\text{km}}{3} \times 60$/시간$= 8$ km/h

23. 철민이는 그림과 같이 밑변의 길이가 6 cm , 높이가 8 cm 인 삼각형 모양의 나무 판자를 가지고 있다. 이 판자를 그림과 같이 잘라 넓이가 12 cm^2 인 직사각형 모양의 판자를 만들려고 한다. 이 때, 이 판자의 가로의 길이를 구하여 라.



▶ 답 : _____ cm

▷ 정답 : 3 cm

해설

삼각형에 내접하는 직사각형의 가로를 α , 세로를 β 라 하자.
닮음 조건에 의해 $\alpha : 8 - \beta = 3 : 4$
$\Rightarrow \quad 3\beta = 24 - 4\alpha,$
넓이가 12 이므로 $\alpha\beta = 12$
$\therefore \ \alpha\beta = \alpha(8 - \frac{4}{3}\alpha) = 12, \ (\alpha - 3)^2 = 0$
$\therefore \ \alpha = 3$

24. 방정식 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{21}$ (단, $x<y$)을 만족하는 양의 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)에 대하여 $x+y$의 최댓값을 구하면?

① 484 ② 192 ③ 112 ④ 100 ⑤ 548

해설

$21(x+y)=xy, \quad xy-21(x+y)=0$
$\therefore \ (x-21)(y-21)=21^2=3^2\times 7^2$
$21x=(x-21)y$이고 $y>x>0$이므로
$y-21>x-21>0$
$\therefore (x-21,\ y-21)$
$=(1,\ 441), (3,\ 147), (7,\ 63), (9,\ 49)$
$\therefore (x,\ y)$
$=(22,\ 462), (24,\ 168), (28,\ 84), (30,\ 70)$
$\therefore \ x+y$의 최댓값은 $22+462=484$

25. $xy-3x-3y+4=0$을 만족하는 양의 정수 $x,\ y$의 합 $x+y$의 값은?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

$xy-3x-3y+4=0$에서
$x(y-3)-3(y-3)-5=0,\ (x-3)y-3=5$
$x\geq 1,\ y\geq 1$이므로 $x-3\geq -2,\ y-3\geq -2$
(i) $x-3=1,\ y-3=5$일 때, $x=4.\ y=8$
(ii) $x-3=5,\ y-3=1$일 때, $x=8,\ y=4$
따라서, 구하는 값은 $x+y=4+8=8+4=12$