

1. $x \neq 3, x \neq 5$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $\frac{3x-19}{x^2-8x+15} = \frac{a}{x-3} - \frac{b}{x-5}$
가 항상 성립하도록 상수 a, b 의 값을 정할 때, $a+b$ 의 값은?

① -2 ② 3 ③ 7 ④ 10 ⑤ 15

해설

우변을 정리하여 좌변의 계수와 비교한다.

$$\begin{aligned}\frac{a}{x-3} - \frac{b}{x-5} &= \frac{a(x-5) - b(x-3)}{(x-3)(x-5)} \\ &= \frac{a(x-5) - b(x-3)}{x^2 - 8x + 15}\end{aligned}$$

$$3x - 19 = (a-b)x + (-5a + 3b)$$

$$\begin{cases} a-b=3 \\ 5a-3b=19 \end{cases} \Rightarrow a=5, b=2$$

$$\therefore a+b=7$$

2. 등식 $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$ 이 x 에 대한 항등식이 될 때, $A-B$ 의 값을 구하면? (단, A, B 는 상수)

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

주어진 식의 우변을 정리하면

$$\frac{A(x+1) + Bx}{x(x+1)} = \frac{(A+B)x + A}{x(x+1)}$$

따라서 $\frac{(A+B)x + A}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)}$ 이므로

$$A+B=0, A=1$$

$$\therefore B=-1$$

$$\therefore A-B=1-(-1)=2$$

3. 등식 $\frac{x^2+1}{x^3-6x^2+11x-6} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}$ 이 x 에 대한 항등식 이 되도록 상수 a, b, c 에 대하여 abc 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -25

해설

$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$ 이므로

양변에 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 을 곱하면

$x^2 + 1 = a(x-2)(x-3) + b(x-1)(x-3) + c(x-1)(x-2)$

양변에 $x = 1$ 을 대입하면 $2 = 2a$

$\therefore a = 1$

양변에 $x = 2$ 를 대입하면 $5 = -b$

$\therefore b = -5$

양변에 $x = 3$ 을 대입하면 $10 = 2c$

$\therefore c = 5$

$\therefore abc = -25$

4. $\frac{4x^2}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+1}$ 가 x 에 관한 항등식이 되도록 실수 a, b, c 의 값을 정하였을 때, abc 의 값은?

- ① 2 ② 3 ③ 6 ④ 12 ⑤ 24

해설

$$\frac{4x^2}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+1} \cdots \textcircled{1}$$

①의 양변에 $(x-1)^2(x+1)$ 을 곱하면

$$4x^2 = a(x-1)(x+1) + b(x+1) + c(x-1)^2 \cdots \textcircled{2}$$

②가 x 에 관한 항등식이므로

$x = 1, -1, 0$ 을 각각 대입하면

$4 = 2b, 4 = 4c, 0 = -a + b + c$

$\therefore a = 3, b = 2, c = 1$

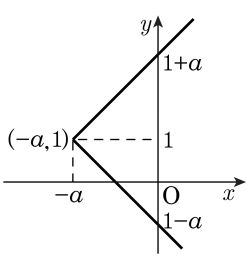
$\therefore abc = 6$

5. $|y-1|=x+a$ 의 그래프와 y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 4 일 때, 양수 a 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$|y-1|=x+a$ 의
그래프는 $|y|=x$ 를
 x 축 음의 방향으로 a ,
 y 축 양의 방향으로 1 만큼 평행이동시킨
그래프이므로 다음 그림과 같다.
이때, y 절편은 $|y-1|=a$ 에서 $y=1\pm a$
 $\therefore S = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot a = 4 \quad \therefore a = 2(a > 0)$



6. 두 함수 $y = |x + 1| - |x - 2|$, $y = mx$ 의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나도록 상수 m 의 값을 정할 때, 다음 중 m 의 값이 될 수 있는 것을 구하면?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$y = |x + 1| - |x - 2|$ 에서

i) $x < -1$ 일 때

$$y = -(x + 1) - (-x + 2) = -3$$

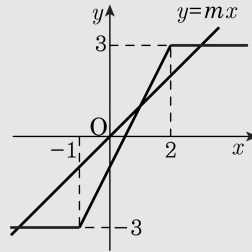
ii) $-1 \leq x < 2$ 일 때

$$y = (x + 1) - (-x + 2) = 2x - 1$$

iii) $x \geq 2$ 일 때

$$y = (x + 1) - (x - 2) = 3$$

i) ii) iii)에서 $y = mx$ 와 서로 다른 세 점에서 만나기 위해서는 $0 < m < \frac{3}{2}$ 따라서 m 의 값이 될 수 있는 것은 ④번이다.



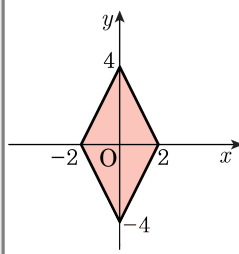
7. 함수 $2|x| + |y| = 4$ 의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$2|x| + |y| = 4$ 의 그래프는 $2x + y = 4$,
즉 $y = -2x + 4$ 의 그래프에서
 $x \geq 0, y \geq 0$ 인 부분만 남기고,
이 그래프를 x 축, y 축, 원점에 대하여 각
각 대칭시킨 것이므로 다음 그림과 같다.
따라서 구하는 도형의 넓이는 $8 \times 4 \times \frac{1}{2} =$
16



8. 두 조건 $p : x^2 + y^2 \leq 4$, $q : |x| + |y - a| \leq 1$ 에 대하여 q 는 p 이기 위한 충분조건일 때, a 의 값의 범위를 구하면?

- ① $-1 < a < 1$ ② $-2 < a < 2$ ③ $-2 \leq a \leq 1$
 ④ $-1 \leq a \leq 1$ ⑤ $-2 \leq a \leq 2$

해설

두 조건 $p : x^2 + y^2 \leq 4$,
 $q : |x| + |y - a| \leq 1$ 에 대하여
 q 는 p 이기 위한 충분조건이므로
 각각의 진리집합을 P, Q 라 하면 $Q \subset P$
 이다.

$x^2 + y^2 = 4$ 는 중심이 원점이고
 반지름의 길이가 2인 원이고,

$|x| + |y - a| = 1$ 의 그래프는

$|x| + |y| = 1$ 의 그래프를

y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.

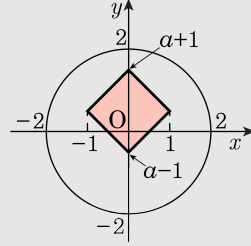
이 때 $P = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$

$Q = \{(x, y) \mid |x| + |y - a| \leq 1\}$ 이 나타내는 영역은 다음 그림과 같다.

따라서 $Q \subset P$ 이라면 다음 그림에서

$a + 1 \leq 2, a - 1 \geq -2$

$\therefore -1 \leq a \leq 1$



9. 다음 보기 중 $X = \{-1, 1, 2\}$ 에서 $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ 로의 함수가 될 수 있는 것은 몇 개인가?

<보기>

- $\textcircled{\tiny ㉠} \ f : x \rightarrow |x|^2$
- $\textcircled{\tiny ㉡} \ g : x \rightarrow x + 2$
- $\textcircled{\tiny ㉢} \ h : x \rightarrow |x| + 1$
- $\textcircled{\tiny ㉣} \ i : x \rightarrow x^2 - 1$
- $\textcircled{\tiny ㉤} \ j : x \rightarrow |x| + 3$

- ① 1개
- ② 2개
- ③ 3개
- ④ 4개
- ⑤ 5개

해설

$\textcircled{\tiny ㉠} \ f(-1) = |-1|^2 = 1 \in Y$
 $f(1) = |1|^2 = 1 \in Y$
 $f(2) = |2|^2 = 4 \in Y$
 $\textcircled{\tiny ㉡} \ g(-1) = -1 + 2 = 1 \in Y$
 $g(1) = 1 + 2 = 3 \in Y$
 $g(2) = 2 + 2 = 4 \in Y$
 $\textcircled{\tiny ㉢} \ h(-1) = |-1| + 1 = 2 \in Y$
 $h(1) = |1| + 1 = 2 \in Y$
 $h(2) = |2| + 1 = 3 \in Y$
 $\textcircled{\tiny ㉣} \ i(-1) = i(1) = 0 \notin Y$
 $\textcircled{\tiny ㉤} \ j(2) = 5 \notin Y$
그러므로 $\textcircled{\tiny ㉠}, \textcircled{\tiny ㉡}$ 은 함수가 될 수 없고 $\textcircled{\tiny ㉠}, \textcircled{\tiny ㉡}, \textcircled{\tiny ㉢}$ 3개 만 함수가 될 수 있다.

10. 함수 $y = \frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하면, 함수 $y = \frac{bx+c}{x+a}$ 의 그래프와 일치한다. 이 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

함수 $y = \frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼,

y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하면

$$y = \frac{2}{x-2} - 1 = \frac{-x+4}{x-2}$$

따라서 $a = -2$, $b = -1$, $c = 4$

$$\therefore a+b+c = 1$$

11. $y = \frac{2x}{2x+1}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프는?

① $y = 2 - \frac{2x}{2x-5}$
③ $y = 3 - \frac{1}{2x-5}$
⑤ $y = 3 + \frac{3x}{2x-5}$

② $y = 2 + \frac{2x}{2x-5}$
④ $y = 2 + \frac{x}{2x-5}$

해설

$x \rightarrow x-3, y \rightarrow y-2$ 를 식에 대입하면

$$\begin{aligned} y &= \frac{2x}{2x+1} = \frac{2(x-3)}{2(x-3)+1} + 2 \\ &= \frac{2x-6}{2x-5} + 2 \\ &= \frac{(2x-5)-1}{2x-5} + 2 \\ &= 3 - \frac{1}{2x-5} \end{aligned}$$

12. 유리함수 $y = \frac{4x+3}{x+2}$ 의 그래프는 함수 $y = \frac{a}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 b 만큼, y 축의 방향으로 c 만큼 평행 이동한 것이다. 이 때 $a+b+c$ 의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

해설

$$y = \frac{4x+3}{x+2} = \frac{4(x+2)-5}{x+2} = 4 + \frac{-5}{x+2} \text{ 이므로}$$

$$y = \frac{-5}{x} \text{ 의 그래프를 } x \text{ 축 방향으로 } -2,$$

y 축 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로

$$a+b+c = (-5) + (-2) + 4 = -3$$

13. $y = \frac{x+a}{x+1}$ 의 그래프를 x 축 및 y 축의 방향으로 평행이동 하면 $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프와 겹쳐질 때, a 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$y = \frac{x+a}{x+1} = \frac{x+1+a-1}{x+1} = 1 + \frac{a-1}{x+1} \text{을 평행이동하여}$$

$$y = \frac{1}{x} \text{과 겹치려면 } a-1 = 1$$

$$\therefore a = 2$$

14. 무리수 $\sqrt{k}$ 의 정수 부분을 a , 소수 부분을 b 라 할 때, $a^3 + b^3 = 9ab$ 을 만족하는 양의 정수 k 를 구하면?

① 6 ② 4 ③ 2 ④ 1 ⑤ 11

해설

$\sqrt{k} = a + b \quad \therefore b = \sqrt{k} - a$
 $a^3 + b^3 = 9ab, \quad a^3 + (\sqrt{k} - a)^3 = 9a(\sqrt{k} - a)$
 $\therefore 3a(3a - k) + \sqrt{k}(3a^2 - 9a + k) = 0$
 a, k 가 정수이므로
 $3a(3a - k) = 0, \quad 3a^2 - 9a + k = 0$
연립하여 풀면
 $\therefore a = 2, \quad k = 6$

15. $\sqrt{11-6\sqrt{2}}$ 의 소수 부분 x 에 대하여 $y = x + \frac{1}{x}$ 일 때, $\sqrt{x(y-2)}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{2}-1$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{11-6\sqrt{2}} &= \sqrt{11-2\sqrt{18}} \\ &= \sqrt{(\sqrt{9}-\sqrt{2})^2} \\ &= 3-\sqrt{2} \\ &= 1. \dots \Rightarrow \text{소수부분 } x : 2-\sqrt{2} \\ y = x + \frac{1}{x} &= 2-\sqrt{2} + \frac{1}{2-\sqrt{2}} \\ &= 2-\sqrt{2} + \frac{2+\sqrt{2}}{2} \\ &= 3-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y-2 &= 1-\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{x(y-2)} &= \sqrt{(2-\sqrt{2})\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)} \\ &= \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} \\ &= \sqrt{2}-1\end{aligned}$$

16. $\langle x \rangle = x - [x]$ 라 할 때,
 $\langle \sqrt{3+2\sqrt{2}} \rangle - \frac{1}{\langle \sqrt{3+2\sqrt{2}} \rangle}$ 의 값은?(단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대 정수이다.)
- ① $-2\sqrt{2}$ ② -2 ③ -1
④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{3+2\sqrt{2}} &= \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} \\ &= \sqrt{2}+1 = x \text{라 하자.} \\ [x] &= 2, \langle x \rangle = \sqrt{2}-1 \\ (\text{준식}) &= (\sqrt{2}-1) - \frac{1}{\sqrt{2}-1} \\ &= \sqrt{2}-1 - (\sqrt{2}+1) = -2\end{aligned}$$

17. 실수 x 를 넘지 않는 최대의 정수를 $[x]$ 라고 하고 $\{x\} = x - [x]$ 로 정의

하자 $x = \sqrt{28 - 10\sqrt{3}}$ 일 때, $\{\{x\}^{-1}\}^{-1}$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$x = \sqrt{28 - 10\sqrt{3}} = \sqrt{28 - 2\sqrt{25 \times 3}} = 5 - \sqrt{3}$$

$$[5 - \sqrt{3}] = [3.2\cdots\cdots] = 3$$

$$\{x\} = (5 - \sqrt{3}) - 3 = 2 - \sqrt{3},$$

$$\{x\}^{-1} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$$

$$\{2 + \sqrt{3}\} = 2 + \sqrt{3} - [2 + \sqrt{3}] = \sqrt{3} - 1$$

$$\{2 + \sqrt{3}\}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} = 1.3\cdots\cdots$$

$$\text{따라서, } \{\{x\}^{-1}\}^{-1} = 1$$

18. 무리수 $\sqrt{3-\sqrt{8}}$ 의 정수 부분을 a , 소수 부분을 b 라고 할 때, $n < a-b < n+1$ 을 만족하는 n 의 값을 구하여라. (단, n 은 정수)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$$

정수 부분(a) : 0, 소수 부분(b) : $\sqrt{2}-1$

$$n < 0 - \sqrt{2} + 1 < n + 1$$

$$n - 1 < -\sqrt{2} < n$$

$$n - 1 < -1.414 \cdots < n$$

$$\therefore n = -1$$

19. 함수 $y = \frac{x+1}{x-2}$ 의 그래프에서 점근선의 방정식을 $x = a$, $y = b$ 라 할 때, 함수 $y = \sqrt{ax+b}$ 의 역함수의 최솟값을 구하면?

- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$$y = \frac{x+1}{x-2} = 1 + \frac{3}{x-2}$$

$$\therefore \text{점근선은 } x = 2, y = 1$$

$$\therefore a = 2, b = 1$$

$$y = \sqrt{2x+1} \text{ 의 } \left(x \geq -\frac{1}{2}\right) \text{ 역함수는}$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \quad (x \geq 0)$$

$$\therefore \text{최솟값은 } -\frac{1}{2}$$

20. 함수 $f(x) = \sqrt{2x+1}$ 의 역함수를 $y = g(x)$ 라 할 때, 좌표평면 위에서 두 곡선 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 교점의 좌표를 구하면?

① $(-1, -1)$

② $(0, 0)$

③ $(1, 1)$

④ $(2, 2)$

⑤ $(3, 3)$

해설

$y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 는 서로 역함수이므로
두 함수의 그래프의 교점은 $y = f(x)$ 와
직선 $y = x$ 의 교점과 일치한다.
따라서 $\sqrt{2x+3} = x$ 의 양변을 제곱하여
정리하면 $x^2 - 2x - 3 = 0$, $(x+1)(x-3) = 0$
 $\therefore x = -1, 3$
 $x \geq 0$ 이므로 $x = 3$
즉, 교점의 좌표는 $(3, 3)$ 이다.

21. $y = \sqrt{x+2}$ 와 $x = \sqrt{y+2}$ 의 교점의 좌표를 $P(a, b)$ 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ $\frac{7}{5}$

해설

두 곡선은 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로
두 곡선의 교점은 $y = \sqrt{x+2}$ 와 $y = x$ 와의
교점이다.

$$\sqrt{x+2} = x \text{ 에서 } x^2 = x+2$$

$$\therefore x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x-2)(x+1) = 0 \text{ 에서}$$

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

$$\therefore P(a, b) = P(2, 2)$$

($\therefore P(a, b)$ 는 제 1 사분면에 존재한다.)

22. 무리함수 $f(x) = \sqrt{x+3} - 1$ 의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점 P의 좌표를 구하면?

① (1, -2)

② (-3, -1)

③ (1, 1)

④ (-2, -2)

⑤ (1, 1), (-2, -2)

해설

$f(x)$ 와 $f^{-1}(x)$ 의 교점의 x 좌표는

$f(x) = x$ 의 해와 같다. $\sqrt{x+3} - 1 = x$ 에서

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$x = 1, -2$$

$$x = 1 (\because x \geq -1)$$

$$\therefore P = (1, 1)$$

23. 정의역이 $\{x \mid x > 1\}$ 인 두 함수 $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $g(x) = \sqrt{3(x-1)}$ 에 대하여 $(f \circ g)^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$ 의 값은?

- ① 2
- ② 4
- ③ 6
- ④ 8
- ⑤ 10

해설

$$(f \circ g)^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = a \text{라 하면}$$
$$(f \circ g)(a) = \frac{1}{4} \text{이고}$$
$$f(g(a)) = f(\sqrt{3(a-1)})$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3(a-1)}+1} \text{이므로}$$
$$\frac{1}{\sqrt{3(a-1)}+1} = \frac{1}{4}$$
$$\sqrt{3(a-1)}+1 = 4,$$
$$\sqrt{3(a-1)} = 3$$
$$3(a-1) = 9, a-1 = 3, a = 4$$
$$\therefore (f \circ g)^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = 4$$

24. 다음 등식이 $x \neq 0$, $x \neq -1$ 인 모든 실수 x 에 대하여 항상 성립하도록 상수 a, b, c 의 값을 정하여라.

$$\frac{2x+1}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$$

해설

(1) 단계

준식의 우변을 통분하면

$$\begin{aligned} & \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2} \\ &= \frac{a(x+1)^2 + bx(x+1) + cx}{x(x+1)^2} \\ &= \frac{(a+b)x^2 + (2a+b+c)x + a}{x(x+1)^2} \end{aligned}$$

(2) 단계

따라서

$$\begin{aligned} & \frac{2x+1}{x(x+1)^2} \\ &= \frac{(a+b)x^2 + (2a+b+c)x + a}{x(x+1)^2} \text{ 가} \end{aligned}$$

$x \neq 0$, $x \neq -1$ 인 모든 실수 x 에 대하여 항상 성립하므로

양변의 분자가 반드시 같아야 한다.

$$\text{즉, } 2x+1 = (a+b)x^2 + (2a+b+c)x + a$$

양변의 계수를 비교하면

$$a+b=0, 2a+b+c=2, a=1$$

(3) 단계

$$\therefore a=1, b=-1, c=1$$

25. 분수함수 $y = \frac{2x+1}{x+1}$ 의 그래프는 $y = \frac{k}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 d 만큼, y 축으로 b 만큼 평행이동한 것이다. 이때, k, a, b 의 값을 각각 구하시오.

해설

(1) 단계

$$y = \frac{2x+1}{x+1} = \frac{2(x+1)-1}{x+1} = \frac{-1}{x+1} + 2$$

(2) 단계

$y = \frac{-1}{x+1} + 2$ 은 $y = \frac{-1}{x}$ 를 x 축의 방향으로 -1 , y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동 한 것이다.

(3) 단계

따라서 $k = -1, a = -1, b = 2$