1. 두 실수 $a,\ b$에 대하여 $a+b=\sqrt{7\sqrt{5}-\sqrt{3}},\ a-b=\sqrt{7\sqrt{3}-\sqrt{5}}$가 성립할 때, a^2+ab+b^2의 값을 구하면?

① $4\sqrt{5}+3\sqrt{3}$　② $4\sqrt{5}+2\sqrt{3}$　③ $4\sqrt{5}+\sqrt{3}$
④ $5\sqrt{5}+\sqrt{3}$　⑤ $5\sqrt{5}+2\sqrt{3}$

해설

$$
\begin{aligned}
a^2+b^2 &= \frac{1}{2}\{(a+b)^2+(a-b)^2\} \\
&= \frac{1}{2}(7\sqrt{5}-\sqrt{3}+7\sqrt{3}-\sqrt{5}) \\
&= 3\sqrt{5}+3\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
ab &= \frac{1}{4}\{(a+b)^2-(a-b)^2\} \\
&= \frac{1}{4}(7\sqrt{5}-\sqrt{3}-7\sqrt{3}+\sqrt{5}) \\
&= 2\sqrt{5}-2\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

$\therefore\ a^2+ab+b^2=5\sqrt{5}+\sqrt{3}$

2. $x^2 = 6+3\sqrt{3},\ y^2 = 6-3\sqrt{3}$ 을 만족하는 두 양수 $x,\ y$ 에 대하여, x^3+y^3 의 값을 구하면?

① $6\sqrt{2}$ ② $9\sqrt{2}$ ③ $18\sqrt{2}$ ④ $24\sqrt{2}$ ⑤ $27\sqrt{2}$

해설

$x^2 = 6+3\sqrt{3},\ y^2 = 6-3\sqrt{3}$

$x^2y^2 = (6+3\sqrt{3})(6-3\sqrt{3}) = 36-27 = 9$

$xy = 3$

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= x^2+y^2+2xy \\ &= 6+3\sqrt{3}+6-3\sqrt{3}+6 \\ &= 12+6 = 18\end{aligned}$$

$x+y = 3\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\ x^3+y^3 &= (x+y)^3-3xy(x+y) \\ &= (3\sqrt{2})^3-3\cdot3\cdot3\sqrt{2} \\ &= 54\sqrt{2}-27\sqrt{2} = 27\sqrt{2}\end{aligned}$$

3. $x^2-6x+1=0$일 때, $\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$의 값을 구하면?

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $\sqrt{6}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

해설

$x^2-6x+1=0$에서 $x\neq 0$이므로 양변을 x로 나누어 정리하면

$x+\dfrac{1}{x}=6$

$\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=t$라 하면 $t^2=x+\dfrac{1}{x}+2$

$\therefore\ t=\pm 2\sqrt{2}$

그런데 $\sqrt{x}>0$, $\dfrac{1}{\sqrt{x}}>0$이므로

$t=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=2\sqrt{2}$

4. $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$, $y = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ 일 때, 다음 식의 값은?

$$\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \left(\frac{1}{y}\right)^3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$$

① $3(\sqrt{3} + \sqrt{2})$　② $3(\sqrt{3} - \sqrt{2})$　③ 9
④ $5(\sqrt{3} + \sqrt{2})$　⑤ $7(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

해설

$$(\text{주어진 식}) = \frac{\frac{x^3 + y^3}{(xy)^3}}{\frac{x + y}{xy}}$$

$$= \frac{(x+y)^3 - 3xy(x+y)}{(x+y)(xy)^2}$$

$$= \frac{(x+y)^2 - 3xy}{(xy)^2}$$

조건에서 $x + y = 2\sqrt{3},\ xy = 1$

$\therefore$ $(\text{주어진 식}) = \dfrac{(2\sqrt{3})^2 - 3 \cdot 1^2}{1} = 9$

5. $x = \sqrt{7 - \sqrt{48}}$ 일 때, $x^5 + \frac{1}{x^5}$ 의 값을 구하면?

① 36　② 98　③ 448　④ 724　⑤ 1024

해설

$x = \sqrt{7 - \sqrt{48}} = \sqrt{7 - 2\sqrt{12}}$

$= \sqrt{4} - \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}$

$\therefore \quad x + \frac{1}{x} = 2 - \sqrt{3} + \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$

$= 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} = 4$

$x^2 + {\frac{1}{x}}^{2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 16 - 2 = 14$

$x^3 + {\frac{1}{x}}^{3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$

$= 64 - 12 = 52$

따라서, $x^5 + \frac{1}{x^5}$

$= \left(x^2 + {\frac{1}{x}}^{2}\right)\left(x^3 + {\frac{1}{x}}^{3}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right)$

$= 14 \times 52 - 4 = 724$

6. $\sqrt{11-\sqrt{72}}$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라 할 때, $\sqrt{(b-a)^2}$의 값은?

① 1 ② $1-\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{2}-1$
④ $\sqrt{2}$ ⑤ $-\sqrt{2}$

해설

$\sqrt{11-\sqrt{72}}=\sqrt{11-2\sqrt{18}}$

$=\sqrt{(\sqrt{9}-\sqrt{2})^2}=3-\sqrt{2}$

$3-\sqrt{2}=1.\times\times\times\times$

정수 부분 a : 1 소수부분 b : $2-\sqrt{2}$

$\therefore \sqrt{(b-a)^2}=\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$

$=\sqrt{2}-1\ \ (1-\sqrt{2}<0)$

7. $\sqrt{4+\sqrt{12}}$ 의 정수 부분을 x, 소수 부분을 y 라 할 때, $(x+2y)^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 12

해설

$\sqrt{4+\sqrt{12}} = \sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{3}+1 = 2.\times\times\cdots$

$\therefore x = 2,\ y = (\sqrt{3}+1)-2 = \sqrt{3}-1$

$(x+2y)^2 = \{2+2(\sqrt{3}-1)\}^2 = (2\sqrt{3})^2 = 12$

8. $\sqrt{10+\sqrt{96}}$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라 할 때, $a+b+\dfrac{2}{a+b}$의 값을 구하면?

① $2\sqrt{6}$　② $\sqrt{6}$　③ $2-\sqrt{6}$
④ $3+\sqrt{6}$　⑤ $3+\sqrt{3}$

해설

$$\sqrt{10+\sqrt{96}} = \sqrt{10+2\sqrt{24}} = \sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{4})^2}$$
$$= \sqrt{6}+2,\ 2+\sqrt{6} = 4.\times\times\times$$
$\therefore$ 정수 부분 a : 4 소수 부분 b : $= \sqrt{6}-2$
$$\Rightarrow a+b+\frac{2}{a+b} = 2+\sqrt{6}+\frac{2}{2+\sqrt{6}}$$
$$= \sqrt{6}+2+\frac{2(\sqrt{6}-2)}{(\sqrt{6}+2)(\sqrt{6}-2)}$$
$$= 2\sqrt{6}$$

9. $3+\sqrt{8}$의 소수 부분을 x라 할 때, $\sqrt{x^2+4x}$의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

(1) 단계
$2<\sqrt{8}<3$이므로
$3+\sqrt{8}-2+2=5+\sqrt{8}-2$ 에서
소수 부분 $x=\sqrt{8}-2$
(2) 단계
$x+2=\sqrt{8}$
(양변을 제곱하면) $x^2+4x+4=8$,
$x^2+4x=4$를 대입하면
(준식)$=\sqrt{4}=2$

10. 무리수 $\sqrt{k}$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라 할 때, $a^3+b^3=9ab$을 만족하는 양의 정수 k를 구하면?

① 6　　② 4　　③ 2　　④ 1　　⑤ 11

해설

$\sqrt{k}=a+b \quad \therefore\ b=\sqrt{k}-a$

$a^3+b^3=9ab, \quad a^3+(\sqrt{k}-a)^3=9a(\sqrt{k}-a)$

$\therefore\ 3a(3a-k)+\sqrt{k}(3a^2-9a+k)=0$

$a,\ k$가 정수이므로

$3a(3a-k)=0, \quad 3a^2-9a+k=0$

연립하여 풀면

$\therefore a=2, \quad k=6$

11. 정의역이 $\{x \mid x>1\}$인 두 함수 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$, $g(x)=\sqrt{3(x-1)}$에 대하여 $(f\circ g)^{-1}\left(\dfrac{1}{4}\right)$의 값은?

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

해설

$(f\circ g)^{-1}\left(\dfrac{1}{4}\right)=a$라 하면

$(f\circ g)(a)=\dfrac{1}{4}$이고

$f(g(a))=f(\sqrt{3(a-1)})$

$=\dfrac{1}{\sqrt{3(a-1)}+1}$이므로

$\dfrac{1}{\sqrt{3(a-1)}+1}=\dfrac{1}{4}$

$\sqrt{3(a-1)}+1=4$,

$\sqrt{3(a-1)}=3$

$3(a-1)=9$, $a-1=3$, $a=4$

$\therefore (f\circ g)^{-1}\left(\dfrac{1}{4}\right)=4$

12. 무리함수 $y=-\sqrt{1-x}+2$의 역함수는?

① $y=(x-2)^2+1(x\le 2)$　② $y=(x-2)^2-1(x\le 2)$
③ $y=-(x-2)^2+1(x\le 2)$　④ $y=-(x-2)^2-1(x\le 2)$
⑤ $y=-(x+2)^2+1(x\le 2)$

해설

$y=-\sqrt{1-x}+2$에서 $1-x\ge 0$이므로 $x\le 1$
$y-2=-\sqrt{1-x}\le 0$이므로 $y\le 2$
$1-x=(y-2)^2,\ x=-(y-2)^2+1$
$x,\ y$를 바꾸면 구하는 역함수는
$\therefore y=-(x-2)^2+1(x\le 2)$

13. 무리함수 $y = \sqrt{x-a}+1$에 대하여 $f^{-1}(2)=3$일 때, 상수 a의 값을 구하면?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설
$f(3)=2$
$\therefore 2=\sqrt{3-a}+1$
$\therefore a=2$

14. 함수 $y = \sqrt{x-1}+2$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때 $g(3)$ 의 값은?

① 3　　② 2　　③ 0
④ $2+\sqrt{2}$　　⑤ 4

해설

$y = \sqrt{x-1}+2$ 에서
$y-2 = \sqrt{x-1}$ 이 식의 양변을 제곱하면
$y^2-4y+4 = x-1$
$x = y^2-4y+4+1$
따라서 $g(x) = x^2-4x+5\ (x \geq 2)$ 이므로
$g(3) = 3^2-4\cdot 3+5 = 9-12+5 = 2$

15. 함수 $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ 의 그래프에서 점근선의 방정식을 $x=a$, $y=b$라 할 때, 함수 $y=\sqrt{ax+b}$ 의 역함수의 최솟값을 구하면?

① -1　　② $-\dfrac{1}{2}$　　③ $\dfrac{1}{2}$　　④ 1　　⑤ $\dfrac{3}{2}$

해설

$y=\dfrac{x+1}{x-2}=1+\dfrac{3}{x-2}$

$\therefore$ 점근선은 $x=2,\ y=1$

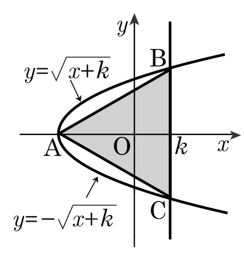
$\therefore\ a=2,\ b=1$

$y=\sqrt{2x+1}$ 의 $\left(x\geq-\dfrac{1}{2}\right)$ 역함수는

$y=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}\ \ (x\geq0)$

$\therefore$ 최솟값은 $-\dfrac{1}{2}$

16. 다음 그림과 같이 두 함수 $y = \sqrt{x+k}$, $y = -\sqrt{x+k}$ 의 그래프의 교점을 A, 두 그래프와 직선 $x = k$ 의 교점을 각각 점B, C라고 할 때, $\triangle$ABC의 넓이가 64이다. 이 때, 실수 k 의 값은?



① 6 ② 7 ③ 8

④ 9 ⑤ 10

해설

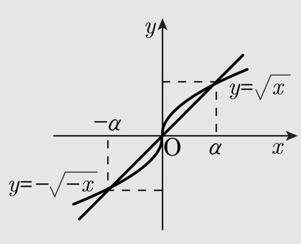
점 A의 좌표는 $(-k,\ 0)$ 이고,
$y = \sqrt{x+k}$ 에서 $x = k$ 일 때, $y = \sqrt{2k}$
$y = -\sqrt{x+k}$ 에서 $x = k$ 일 때, $y = -\sqrt{2k}$
이므로 두 점 B, C의 좌표는 각각
B $(k,\ \sqrt{2k})$, C $(k,\ -\sqrt{2k})$ 이다.
따라서 삼각형 ABC의 넓이는
$\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2k} \cdot 2k = 64$, $k\sqrt{2k} = 32$
양변을 제곱하면 $2k^3 = 32^2$, $k^3 = 512$
이 때, k는 실수이므로
$\therefore k = 8$

17. 원점을 지나는 직선이 두 함수 $y=\sqrt{x}$, $y=-\sqrt{-x}$의 그래프와 서로 다른 세 점에서 만날 때, 세 점의 x좌표의 값의 합을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

두 함수 $y=\sqrt{x}$, $y=-\sqrt{-x}$ 의 그래프는
원점에 대하여 대칭이므로
다음 그림과 같이 원점을 지나는 직선과 서로 다른 세 점에서 만날 때, 세 점의 x 좌표의 값의 합은 항상 0이다.

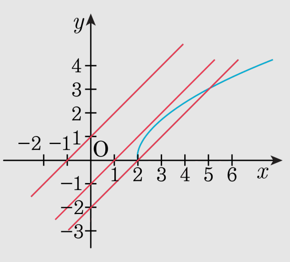


18. 곡선 $y = \sqrt{4x-8}$과 직선 $y = x + k$가 한 점에서 만나기 위한 k 의 값의 범위는?

① $k = -2$ 또는 $k > 1$
② $k = -1$ 또는 $k < -2$
③ $k = 1$ 또는 $k > 2$
④ $k = 2$ 또는 $k < -1$
⑤ $k = -1$

해설

그래프에서 보듯이 한 점에서 만나는 경우는
접하는 경우이거나 $k < -2$ 인 경우이다.

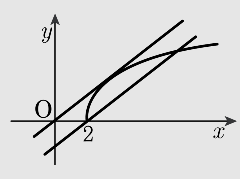


접하는 경우는 $\sqrt{4x-8} = x + k$에서
$4x - 8 = x^2 + 2kx + k^2$
$x^2 + 2(k-2)x + k^2 + 8 = 0$
$\frac{D}{4} = (k-2)^2 - (k^2+8) = -4k - 4 = 0$에서 $k = -1$
따라서 $k = -1$ 또는 $k < -2$

19. 두 함수 $y = \sqrt{x-2}$, $y = x+k$가 두 점에서 만나기 위한 k의 값의 범위를 구하면 $m \le k < n$이다. 이 때, mn의 값을 구하면?

① $-\frac{3}{2}$ ② -1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ $\frac{7}{2}$

해설



다음 그래프를 보면
직선 $y = x + k$ 가
$y = \sqrt{x-2}$ 의 그래프와
두 점에서 만나는 것은
$(2, 0)$ 을 지나는 순간부터 접하기 전까지
움직일 때이다.
따라서 $y = x + k$ 에 $(2, 0)$ 을 대입하면
$k = -2 \therefore k \ge -2 \cdots \cdots$ ㉠
또한 $y = x + k$ 가 $y = \sqrt{x-2}$ 와 접할 때는
두 식을 연립한 방정식이 중근을 가질 때이므로
$x + k = \sqrt{x-2}$ 에서 양변을 제곱하면
$x^2 + 2kx + k^2 = x - 2$,
$x^2 + (2k-1)x + k^2 + 2 = 0$
$\mathrm{D} = (2k-1)^2 - 4(k^2+2) = 0$
$-4k - 7 = 0, k = -\frac{7}{4}$
$\therefore k < -\frac{7}{4} \cdots \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $-2 \le k < -\frac{7}{4}$ 이므로
$m = -2, n = -\frac{7}{4}$
$\therefore mn = \frac{7}{2}$

20. 두 함수 $y = \sqrt{x+1}+2$, $y = mx$ 의 그래프가 서로 만나지 않도록 하는 실수 m 의 값의 범위는 $a < m \le b$ 이다. 이 때 $a+b$의 값은?

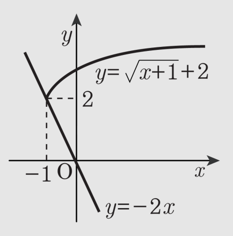
① -4　② -3　③ -2　④ -1　⑤ 0

해설

다음 그림에서 두 함수의 그래프가 만나지 않으려면 m의 값의 범위는 $-2 < m \le 0$ 이어야 한다.

$\therefore a = -2, b = 0$

$\therefore a + b = -2$



21. $x=\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}$, $y=\frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}$ 일 때, x^2+xy+y^2 의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$x=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

$y=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

$x+y=2\sqrt{3}$, $xy=1$

$x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy=12-1=11$

22. $0 < a < 1$ 이고 $x = a - \dfrac{1}{a}$ 일 때, $\sqrt{x^2+4} - \sqrt{x^2}$ 를 a로 나타내면?

① $2a$ ② $\dfrac{2}{a}$ ③ $-\dfrac{2}{a}$ ④ $-2a$ ⑤ 0

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+4} - \sqrt{x^2} &= \sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4} - \sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2} - \left|a-\frac{1}{a}\right| \\ &= \left(a+\frac{1}{a}\right) + \left(a-\frac{1}{a}\right) = 2a\end{aligned}$$

23. $x=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$, $y=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ 일 때, $(x+y)^2-(x-y)^2$ 의 값을 구하면?

① 2 ② 3 ③ $2\sqrt{3}$

④ $-2\sqrt{3}$ ⑤ $2\sqrt{6}$

해설

$x+y=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$

$=\sqrt{5}$

$x-y=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$

$=\sqrt{2}-\sqrt{3}$

$(x+y)^2-(x-y)^2=5-(5-2\sqrt{6})=2\sqrt{6}$

24. $x=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$, $y=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ 일 때, x^3+y^3의 값은?

① $8\sqrt{3}$ ② $24\sqrt{3}$ ③ $30\sqrt{3}$ ④ 48 ⑤ 52

해설

$x=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$,

$y=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$

$x+y=4,\quad xy=1$

$$\begin{aligned}x^3+y^3&=(x+y)^3-3xy(x+y)\\&=4^3-3\times4=52\end{aligned}$$

25. $2x = t + \sqrt{t^2 - 1}$ 이고 $3y = t - \sqrt{t^2 - 1}$ 일 때, $x = 3$ 이면 y 의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{9}$ ③ $\frac{1}{18}$ ④ $\frac{1}{36}$ ⑤ $\frac{1}{72}$

해설

두 식을 곱하면

$6xy = (t + \sqrt{t^2 - 1})(t - \sqrt{t^2 - 1}) = t^2 - (t^2 - 1)$

$6xy = 1 \ \therefore \ y = \frac{1}{6x}$

$x = 3$ 이므로 $y = \frac{1}{18}$