

1. $x = \frac{a}{b}$, $a \neq b$, $b \neq 0$ 일 때, $\frac{a+b}{a-b}$ 는?

- ① $\frac{x}{x+1}$ ② $\frac{x+1}{x-1}$ ③ 1 ④ $x - \frac{1}{x}$ ⑤ $x + \frac{1}{x}$

해설

$$a = bx \text{ 이므로 } \frac{a+b}{a-b} = \frac{bx+b}{bx-b} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$\text{또는 } \frac{a+b}{a-b} = \frac{\frac{a}{b}+1}{\frac{a}{b}-1} = \frac{x+1}{x-1}$$

2. $\frac{x^3-x}{x^2-x} + \frac{x^4-1}{x^2-1} - \frac{x^2-2x-3}{x+1} \times \frac{x+2}{x^2-x-6}$ 을 계산하면?

- ① x^2+x+1 ② $\frac{x^2+1}{x-1}$ ③ $\frac{2x}{x^2-1}$
④ x^2-1 ⑤ $\frac{2x-1}{x^2-x}$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{x(x+1)(x-1)}{x(x-1)} + \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x^2-1} \\ & - \frac{(x+1)(x-3)}{x+1} \times \frac{x+2}{(x-3)(x+2)} \\ & = x+1+x^2+1-1 = x^2+x+1 \end{aligned}$$

3. $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{9^2}\right)\left(1 - \frac{1}{10^2}\right)$ 을 간단히 하면?

- ① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{11}{20}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{7}{10}$

해설

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{9^2}\right)\left(1 - \frac{1}{10^2}\right) \\ &= \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdots \frac{8 \cdot 10}{9^2} \cdot \frac{9 \cdot 11}{10^2} \\ &= \frac{1 \cdot 11}{2 \cdot 10} = \frac{11}{20} \end{aligned}$$

일반적으로

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

4. $\frac{x-3}{x^2+x-6} \times \frac{x+3}{x^2-x-6}$ 을 간단히 계산한 것은?

① $\frac{1}{x^2+4}$

② $\frac{1}{x^2-x-2}$

③ $\frac{1}{x^2-2x+1}$

④ $\frac{1}{x^2+x-2}$

⑤ $\frac{1}{x^2-4}$

해설

$$\begin{aligned} \text{(준식)} &= \frac{x-3}{(x+3)(x-2)} \times \frac{x+3}{(x-3)(x+2)} \\ &= \frac{1}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x^2-4} \end{aligned}$$

5. $\sqrt{11-\sqrt{72}}$ 의 정수 부분을 a , 소수 부분을 b 라 할 때, $\sqrt{(b-a)^2}$ 의 값은?
- ① 1 ② $1-\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{2}-1$
④ $\sqrt{2}$ ⑤ $-\sqrt{2}$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{11-\sqrt{72}} &= \sqrt{11-2\sqrt{18}} \\ &= \sqrt{(\sqrt{9}-\sqrt{2})^2} = 3-\sqrt{2} \\ 3-\sqrt{2} &= 1.\times\times\times\times \\ \text{정수 부분 } a : 1 \quad &\text{소수부분 } b : 2-\sqrt{2} \\ \therefore \sqrt{(b-a)^2} &= \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt{2}-1 \quad (1-\sqrt{2} < 0)\end{aligned}$$

6. $\sqrt{4 + \sqrt{12}}$ 의 정수 부분을 x , 소수 부분을 y 라 할 때, $(x+2y)^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{4 + \sqrt{12}} &= \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{3} + 1 = 2.\times\times\dots \\ \therefore x &= 2, y = (\sqrt{3} + 1) - 2 = \sqrt{3} - 1 \\ (x + 2y)^2 &= (2 + 2(\sqrt{3} - 1))^2 = (2\sqrt{3})^2 = 12\end{aligned}$$

7. $\sqrt{10-8\sqrt{3-\sqrt{8}}}$ 의 소수 부분을 구하면?

① $\sqrt{2}$

② $4-\sqrt{2}$

③ $3-\sqrt{2}$

④ $2-\sqrt{2}$

⑤ $1-\sqrt{2}$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{10-8\sqrt{3-\sqrt{8}}} &= \sqrt{10-8\sqrt{3-2\sqrt{2}}} \\ &= \sqrt{10-8(\sqrt{2}-1)} \\ &= \sqrt{18-8\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{18-2\sqrt{32}} \\ &= 4-\sqrt{2} \approx 2. \times \times \times \\ \therefore \text{정수 부분: } 2, \text{ 소수 부분: } 2-\sqrt{2}\end{aligned}$$

8. $3 + \sqrt{8}$ 의 소수 부분을 x 라 할 때, $\sqrt{x^2 + 4x}$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

(1) 단계

$2 < \sqrt{8} < 3$ 이므로

$3 + \sqrt{8} - 2 + 2 = 5 + \sqrt{8} - 2$ 에서

소수 부분 $x = \sqrt{8} - 2$

(2) 단계

$x + 2 = \sqrt{8}$

(양변을 제곱하면) $x^2 + 4x + 4 = 8$,

$x^2 + 4x = 4$ 를 대입하면

(준식) $= \sqrt{4} = 2$

9. 무리수 $\sqrt{k}$ 의 정수 부분을 a , 소수 부분을 b 라 할 때, $a^3 + b^3 = 9ab$ 을 만족하는 양의 정수 k 를 구하면?

① 6 ② 4 ③ 2 ④ 1 ⑤ 11

해설

$\sqrt{k} = a + b \quad \therefore b = \sqrt{k} - a$
 $a^3 + b^3 = 9ab, \quad a^3 + (\sqrt{k} - a)^3 = 9a(\sqrt{k} - a)$
 $\therefore 3a(3a - k) + \sqrt{k}(3a^2 - 9a + k) = 0$
 a, k 가 정수이므로
 $3a(3a - k) = 0, \quad 3a^2 - 9a + k = 0$
연립하여 풀면
 $\therefore a = 2, \quad k = 6$

10. $\sqrt{18-8\sqrt{2}}$ 의 정수 부분을 x , 소수 부분을 y 라 할 때, $x^2-2xy+y^2$ 의 값을 구하면?

- ① 0
- ② 1
- ③ 2
- ④ 3
- ⑤ 4

해설

$$\sqrt{18-2\sqrt{32}}=\sqrt{16}-\sqrt{2}=4-\sqrt{2}$$
$$1<\sqrt{2}<2, 2<4-\sqrt{2}<3$$
$$x=2, y=2-\sqrt{2}$$
$$x^2-2xy+y^2=(x-y)^2=(2-2+\sqrt{2})^2=2$$

11. $x = \sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$ 일 때, $x^2 - 6x + 10$ 의 값을 구하면?

① -2

② 0

③ $2\sqrt{2}$

④ 3

⑤ $2\sqrt{3}$

해설

$x = \sqrt{11 + 2\sqrt{18}} = 3 + \sqrt{2}$
 $x - 3 = \sqrt{2}$, 양변을 제곱하면
 $x^2 - 6x + 9 = 2$, 양변에 1을 더하면
 $\therefore x^2 - 6x + 10 = 3$

12. $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 일 때, $x^2 - x - 2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$$x = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \text{에서 } 2x = \sqrt{5} + 1$$

$2x - 1 = \sqrt{5}$ 의 양변을 제곱하면

$$4x^2 - 4x + 1 = 5 \quad \therefore x^2 - x - 1 = 0$$

$$\therefore x^2 - x - 2 = x^2 - x - 1 - 1 = 0 - 1 = -1$$

13. $x = \sqrt{3 - \sqrt{8}}$ 일 때 $\frac{x^3 + x^2 - 3x + 6}{x^4 + 2x^3 + 2x + 9}$ 의 값은?

① 1

② 2

③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{1}{4}$

⑤ $\frac{1}{3}$

해설

$$x = \sqrt{3 - \sqrt{8}} = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 \text{ 에서}$$

$$x + 1 = \sqrt{2} \rightarrow x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\text{분자 : } x^3 + x^2 - 3x + 6$$

$$= (x^2 + 2x - 1)(x - 1) + 5 = 5$$

$$\text{분모 : } x^4 + 2x^3 + 2x + 9$$

$$= (x^2 + 2x - 1)(x^2 + 1) + 10 = 10$$

$$\therefore \text{준식} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

14. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ 을 만족시키는 실수 a, b, c 에 대하여 다음 식의 값은?

$$\frac{a}{(a+b)(a+c)} + \frac{b}{(b+c)(b+a)} + \frac{c}{(c+a)(c+b)}$$

- ① -2
- ② -1
- ③ 0
- ④ 2
- ⑤ 3

해설

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab+bc+ca}{abc} = 0, ab+bc+ca=0$$
$$(\because abc \neq 0)$$
$$\frac{a}{(a+b)(a+c)} + \frac{b}{(b+c)(b+a)} + \frac{c}{(c+a)(c+b)}$$
$$= \frac{a(b+c) + b(c+a) + c(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$
$$= \frac{2(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = 0$$

15. $x^2 - 7x + 1 = 0$ 일 때 $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 의 값은?

① 45

② 46

③ 47

④ 48

⑤ 49

해설

x 로 나누면, $x - 7 + \frac{1}{x} = 0$

$x + \frac{1}{x} = 7$

$x^2 + \frac{1^2}{x} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 7^2 - 2 = 47$

16. $x + \frac{1}{x} = 2$ 일 때, $x^2 - \frac{1}{x^2}$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4 = 2^2 - 4 = 0$$

$$\therefore x^2 - \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0 \times 2 = 0$$

17. $x^2 - 3x + 1 = 0$ 에서 $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$x - 3 + \frac{1}{x} = 0, x + \frac{1}{x} = 3$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 3^2 - 2 = 7$$

18. 0이 아닌 세 실수 x, y, z 는 $(x-3)(y-3)(z-3)=0$ 과 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{3}$ 을 모두 만족할 때, $x+y+z$ 의 값은?

- ① 3 ② 2 ③ 1 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

해설

$(x-3)(y-3)(z-3)=0$ 을 전개하면
 $xyz-3(xy+yz+zx)+9(x+y+z)-27=0\cdots\textcircled{1}$
 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{xy+yz+zx}{xyz} = \frac{1}{3}$
 $\therefore 3(xy+yz+zx)=xyz\cdots\textcircled{2}$
②를 ①에 대입하면 $9(x+y+z)=27$
 $\therefore x+y+z=3$

19. 1보다 큰 자연수 x 에 대하여 $f(x) = \frac{x - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$ 로 정의 할 때, $f(25)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

$$f(x) = \frac{x - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{\frac{x^2 - 1}{x}}{\frac{x - 1}{x}} = x + 1$$
$$\therefore f(25) = 26$$

20. $f(x) = \frac{2x-1}{2x+1}$ 에 대하여 $f(25)$ 의 값을 구하면?

① $\frac{45}{51}$

② $\frac{46}{51}$

③ $\frac{47}{51}$

④ $\frac{48}{51}$

⑤ $\frac{49}{51}$

해설

$$\therefore f(25) = \frac{2 \times 25 - 1}{2 \times 25 + 1} = \frac{49}{51}$$

21. 집합 $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 에서 실수 전체의 집합 R 로의 함수 f 가 $f(-x) = -f(x)$ (단, $x \in X$)를 만족한다. $f(-2) + f(1) = 3$ 일 때, $f(-1) + f(0) + f(2)$ 의 값은?

① -5

② -3

③ -1

④ 1

⑤ 3

해설

집합 X 의 임의의 원소 x 에 대하여

$f(-x) = -f(x)$ 이므로 $x = 0$ 을 대입하면

$f(0) = -f(0)$, $2f(0) = 0$

$\therefore f(0) = 0$

또, $f(-1) = -f(1)$, $f(-2) = -f(2)$ 이므로

$f(-2) + f(1) = 3$ 에서

$-f(2) - f(-1) = 3$

$\therefore f(2) + f(-1) = -3$

$\therefore f(-1) + f(0) + f(2)$

$= f(0) + \{f(2) + f(-1)\} = 0 - 3 = -3$

22. 양의 정수 전체의 집합 X 에서 Y 로의 함수 f 를 다음과 같이 정의한다.
 $f(x) = (x \text{의 약수의 개수})$ 이 때, 다음 중 $f(x) = 4$ 인 x 가 될 수 있는
것을 고르면?

① 5 ② 9 ③ 12 ④ 15 ⑤ 24

해설

5의 약수 : 1, 5 $\Rightarrow f(5) = 2$
9의 약수 : 1, 3, 9 $\Rightarrow f(9) = 3$
12의 약수 : 1, 2, 3, 4, 6, 12 $\Rightarrow f(12) = 6$
15의 약수 : 1, 3, 5, 15 $\Rightarrow f(15) = 4$
24의 약수 : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 $\Rightarrow f(24) = 8$
따라서 보기 중 $f(x) = 4$ 인 것은 15

23. 실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} 2-x & (x \text{는 유리수}) \\ x & (x \text{는 무리수}) \end{cases} \quad \text{로 정의될 때, } f(x) + f(2-x) \text{ 의 값}$$

은?

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$$\text{함수 } f(x) = \begin{cases} 2-x & (x \text{는 유리수}) \\ x & (x \text{는 무리수}) \end{cases} \quad \text{에서}$$

(i) x 가 유리수일 때, $2-x$ 도 유리수이므로

$$f(x) + f(2-x) = (2-x) + \{2-(2-x)\} = 2$$

(ii) x 가 무리수일 때, $2-x$ 도 무리수이므로

$$f(x) + f(2-x) = x + (2-x) = 2$$

(i), (ii)에서 $f(x) + f(2-x) = 2$

24. $\frac{x-y}{x+2y} + \frac{x^2-y^2}{x^2+2xy} \div \frac{x-y}{x}$ 을 계산하시오.

해설

$$\begin{aligned} & \frac{x-y}{x+2y} + \frac{x^2-y^2}{x^2+2xy} \times \frac{x}{x-y} \\ &= \frac{x-y}{x+2y} + \frac{(x+y)(x-y)}{x(x+2y)} \times \frac{x}{x-y} \\ &= \frac{x-y}{x+2y} + \frac{x+y}{x+2y} = \frac{2x}{x+2y} \end{aligned}$$

25. 다항식 $f(x) = x^5 - 2x^4 - x^3 + x^2 - x - 3$ 에 대하여 $f \cdot (\sqrt{2} - 1)$ 의 값을 구하시오.

해설

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{2} - 1 \Rightarrow x + 1 = \sqrt{2} \\ \text{양변을 제곱해서 정리하면 } x^2 + 2x - 1 &= 0 \\ f(x) \text{ 를 } x^2 + 2x - 1 \text{ 로 직접 나누면} \\ f(x) &= (x^2 + 2x - 1)(x^3 - 4x^2 + 8x - 19) + 45x - 22 \\ x^2 + 2x - 1 &= 0 \text{ 이므로 } f(x) = 45x - 22 \\ \therefore f(\sqrt{2} - 1) &= 45(\sqrt{2} - 1) - 22 \\ &= 45\sqrt{2} - 67\end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned}(1) \text{ 단계} \\ x &= \sqrt{2} - 1 \Rightarrow x + 1 = \sqrt{2} \\ x^2 &= -2x + 1 \\ x^3 &= x^2 \times x = -2x^2 + x = 5x - 2 \\ x^4 &= x^3 \times x = 5x^2 - 2x = -12x + 5 \\ x^5 &= x^4 \times x = -12x^2 + 5x = 29x - 12 \\ (2) \text{ 단계} \\ f(x) &= x^5 - 2x^4 - x^3 + x^2 - x - 3 \\ &= (29x - 12) - 2(-12x + 5) \\ &\quad - (5x - 2) + (-2x + 1) - x - 3 \\ &= 45x - 22 \\ (3) \text{ 단계} \\ \therefore f(\sqrt{2} - 1) &= 45(\sqrt{2} - 1) - 22 \\ &= 45\sqrt{2} - 67\end{aligned}$$