

1. $x = \frac{a}{b}$, $a \neq b$, $b \neq 0$ 일 때, $\frac{a+b}{a-b}$ 는?

① $\frac{x}{x+1}$

② $\frac{x+1}{x-1}$

③ 1

④ $x - \frac{1}{x}$

⑤ $x + \frac{1}{x}$

해설

$$a = bx \text{ 이므로 } \frac{a+b}{a-b} = \frac{bx+b}{bx-b} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$\text{또는 } \frac{a+b}{a-b} = \frac{\frac{a}{b} + 1}{\frac{a}{b} - 1} = \frac{x+1}{x-1}$$

2. $\frac{x^3 - x}{x^2 - x} + \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} - \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1} \times \frac{x + 2}{x^2 - x - 6}$ 을 계산하면?

① $x^2 + x + 1$

② $\frac{x^2 + 1}{x - 1}$

③ $\frac{2x}{x^2 - 1}$

④ $x^2 - 1$

⑤ $\frac{2x - 1}{x^2 - x}$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{x(x+1)(x-1)}{x(x-1)} + \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x^2-1} \\ & - \frac{(x+1)(x-3)}{x+1} \times \frac{x+2}{(x-3)(x+2)} \\ & = x + 1 + x^2 + 1 - 1 = x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

3. $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{9^2}\right) \left(1 - \frac{1}{10^2}\right)$ 을 간단히 하면?

① $\frac{5}{12}$

② $\frac{1}{2}$

③ $\frac{11}{20}$

④ $\frac{2}{3}$

⑤ $\frac{7}{10}$

해설

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{9^2}\right) \left(1 - \frac{1}{10^2}\right) \\ &= \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdots \frac{8 \cdot 10}{9^2} \cdot \frac{9 \cdot 11}{10^2} \\ &= \frac{1 \cdot 11}{2 \cdot 10} = \frac{11}{20} \end{aligned}$$

일반적으로

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

4. $\frac{x-3}{x^2+x-6} \times \frac{x+3}{x^2-x-6}$ 을 간단히 계산한 것은?

① $\frac{1}{x^2+4}$

② $\frac{1}{x^2-x-2}$

③ $\frac{1}{x^2-2x+1}$

④ $\frac{1}{x^2+x-2}$

⑤ $\frac{1}{x^2-4}$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \frac{x-3}{(x+3)(x-2)} \times \frac{x+3}{(x-3)(x+2)} \\ &= \frac{1}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x^2-4}\end{aligned}$$

5. $\sqrt{11 - \sqrt{72}}$ 의 정수 부분을 a , 소수 부분을 b 라 할 때, $\sqrt{(b-a)^2}$ 의 값은?

① 1

② $1 - \sqrt{2}$

③ $\sqrt{2} - 1$

④ $\sqrt{2}$

⑤ $-\sqrt{2}$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{11 - \sqrt{72}} &= \sqrt{11 - 2\sqrt{18}} \\ &= \sqrt{(\sqrt{9} - \sqrt{2})^2} = 3 - \sqrt{2}\end{aligned}$$

$$3 - \sqrt{2} = 1. \times \times \times \times$$

$$\text{정수 부분 } a : 1 \quad \text{소수부분 } b : 2 - \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt{(b-a)^2} &= \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt{2} - 1 \quad (1 - \sqrt{2} < 0)\end{aligned}$$

6. $\sqrt{4 + \sqrt{12}}$ 의 정수 부분을 x , 소수 부분을 y 라 할 때, $(x+2y)^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$$\sqrt{4 + \sqrt{12}} = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{3} + 1 = 2.\times\times\dots$$

$$\therefore x = 2, y = (\sqrt{3} + 1) - 2 = \sqrt{3} - 1$$

$$(x + 2y)^2 = \{2 + 2(\sqrt{3} - 1)\}^2 = (2\sqrt{3})^2 = 12$$

7. $\sqrt{10 - 8\sqrt{3 - \sqrt{8}}}$ 의 소수 부분을 구하면?

① $\sqrt{2}$

② $4 - \sqrt{2}$

③ $3 - \sqrt{2}$

④ $2 - \sqrt{2}$

⑤ $1 - \sqrt{2}$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{10 - 8\sqrt{3 - \sqrt{8}}} &= \sqrt{10 - 8\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}} \\ &= \sqrt{10 - 8(\sqrt{2} - 1)} \\ &= \sqrt{18 - 8\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{18 - 2\sqrt{32}} \\ &= 4 - \sqrt{2} \approx 2. \times \times \times\end{aligned}$$

$\therefore$ 정수 부분: 2, 소수 부분: $2 - \sqrt{2}$

8. $3 + \sqrt{8}$ 의 소수 부분을 x 라 할 때, $\sqrt{x^2 + 4x}$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

(1) 단계

$2 < \sqrt{8} < 3$ 이므로

$3 + \sqrt{8} - 2 + 2 = 5 + \sqrt{8} - 2$ 에서

소수 부분 $x = \sqrt{8} - 2$

(2) 단계

$x + 2 = \sqrt{8}$

(양변을 제곱하면) $x^2 + 4x + 4 = 8$,

$x^2 + 4x = 4$ 를 대입하면

(준식) $= \sqrt{4} = 2$

9. 무리수 $\sqrt{k}$ 의 정수 부분을 a , 소수 부분을 b 라 할 때, $a^3 + b^3 = 9ab$ 을 만족하는 양의 정수 k 를 구하면?

① 6

② 4

③ 2

④ 1

⑤ 11

해설

$$\sqrt{k} = a + b \quad \therefore b = \sqrt{k} - a$$

$$a^3 + b^3 = 9ab, \quad a^3 + (\sqrt{k} - a)^3 = 9a(\sqrt{k} - a)$$

$$\therefore 3a(3a - k) + \sqrt{k}(3a^2 - 9a + k) = 0$$

a, k 가 정수이므로

$$3a(3a - k) = 0, \quad 3a^2 - 9a + k = 0$$

연립하여 풀면

$$\therefore a = 2, \quad k = 6$$

10. $\sqrt{18 - 8\sqrt{2}}$ 의 정수 부분을 x , 소수 부분을 y 라 할 때, $x^2 - 2xy + y^2$ 의 값을 구하면?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$\sqrt{18 - 2\sqrt{32}} = \sqrt{16} - \sqrt{2} = 4 - \sqrt{2}$$

$$1 < \sqrt{2} < 2, 2 < 4 - \sqrt{2} < 3$$

$$x = 2, y = 2 - \sqrt{2}$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 = (2 - 2 + \sqrt{2})^2 = 2$$

11. $x = \sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$ 일 때, $x^2 - 6x + 10$ 의 값을 구하면?

① -2

② 0

③ $2\sqrt{2}$

④ 3

⑤ $2\sqrt{3}$

해설

$$x = \sqrt{11 + 2\sqrt{18}} = 3 + \sqrt{2}$$

$$x - 3 = \sqrt{2}, \text{ 양변을 제곱하면}$$

$$x^2 - 6x + 9 = 2, \text{ 양변에 } 1 \text{ 을 더하면}$$

$$\therefore x^2 - 6x + 10 = 3$$

12. $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 일 때, $x^2 - x - 2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$$x = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \text{ 에서 } 2x = \sqrt{5}+1$$

$2x - 1 = \sqrt{5}$ 의 양변을 제곱하면

$$4x^2 - 4x + 1 = 5 \quad \therefore x^2 - x - 1 = 0$$

$$\therefore x^2 - x - 2 = x^2 - x - 1 - 1 = 0 - 1 = -1$$

13. $x = \sqrt{3 - \sqrt{8}}$ 일 때 $\frac{x^3 + x^2 - 3x + 6}{x^4 + 2x^3 + 2x + 9}$ 의 값은?

① 1

② 2

③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{1}{4}$

⑤ $\frac{1}{3}$

해설

$$x = \sqrt{3 - \sqrt{8}} = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 \text{ 에서}$$

$$x + 1 = \sqrt{2} \rightarrow x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\text{분자 : } x^3 + x^2 - 3x + 6$$

$$= (x^2 + 2x - 1)(x - 1) + 5 = 5$$

$$\text{분모 : } x^4 + 2x^3 + 2x + 9$$

$$= (x^2 + 2x - 1)(x^2 + 1) + 10 = 10$$

$$\therefore \text{준식} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

14. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ 을 만족시키는 실수 a, b, c 에 대하여 다음 식의 값은?

$$\frac{a}{(a+b)(a+c)} + \frac{b}{(b+c)(b+a)} + \frac{c}{(c+a)(c+b)}$$

① -2

② -1

③ 0

④ 2

⑤ 3

해설

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab + bc + ca}{abc} = 0, ab + bc + ca = 0$$

($\because abc \neq 0$)

$$\frac{a}{(a+b)(a+c)} + \frac{b}{(b+c)(b+a)} + \frac{c}{(c+a)(c+b)}$$

$$= \frac{a(b+c) + b(c+a) + c(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$= \frac{2(ab + bc + ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = 0$$

15. $x^2 - 7x + 1 = 0$ 일 때 $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 의 값은?

① 45

② 46

③ 47

④ 48

⑤ 49

해설

$$x \text{로 나누면, } x - 7 + \frac{1}{x} = 0$$

$$x + \frac{1}{x} = 7$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 7^2 - 2 = 47$$

16. $x + \frac{1}{x} = 2$ 일 때, $x^2 - \frac{1}{x^2}$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4 = 2^2 - 4 = 0$$

$$\therefore x^2 - \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right) \left(x + \frac{1}{x}\right) = 0 \times 2 = 0$$

17. $x^2 - 3x + 1 = 0$ 에서 $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$x - 3 + \frac{1}{x} = 0, x + \frac{1}{x} = 3$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 3^2 - 2 = 7$$

18. 0이 아닌 세 실수 x, y, z 는 $(x-3)(y-3)(z-3) = 0$ 과 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{3}$ 을 모두 만족할 때, $x+y+z$ 의 값은?

① 3

② 2

③ 1

④ $\frac{1}{2}$

⑤ $\frac{1}{3}$

해설

$(x-3)(y-3)(z-3) = 0$ 을 전개하면

$$xyz - 3(xy + yz + zx) + 9(x + y + z) - 27 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{xy + yz + zx}{xyz} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore 3(xy + yz + zx) = xyz \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } 9(x + y + z) = 27$$

$$\therefore x + y + z = 3$$

19. 1보다 큰 자연수 x 에 대하여 $f(x) = \frac{x - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$ 로 정의 할 때, $f(25)$ 의

값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 26

해설

$$f(x) = \frac{x - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{\frac{x^2 - 1}{x}}{\frac{x - 1}{x}} = x + 1$$

$$\therefore f(25) = 26$$

20. $f(x) = \frac{2x-1}{2x+1}$ 에 대하여 $f(25)$ 의 값을 구하면?

① $\frac{45}{51}$

② $\frac{46}{51}$

③ $\frac{47}{51}$

④ $\frac{48}{51}$

⑤ $\frac{49}{51}$

해설

$$\therefore f(25) = \frac{2 \times 25 - 1}{2 \times 25 + 1} = \frac{49}{51}$$

21. 집합 $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 에서 실수 전체의 집합 R 로의 함수 f 가 $f(-x) = -f(x)$ (단, $x \in X$)를 만족한다. $f(-2) + f(1) = 3$ 일 때, $f(-1) + f(0) + f(2)$ 의 값은?

① -5

② -3

③ -1

④ 1

⑤ 3

해설

집합 X 의 임의의 원소 x 에 대하여

$f(-x) = -f(x)$ 이므로 $x = 0$ 을 대입하면

$$f(0) = -f(0), 2f(0) = 0$$

$$\therefore f(0) = 0$$

또, $f(-1) = -f(1)$, $f(-2) = -f(2)$ 이므로

$f(-2) + f(1) = 3$ 에서

$$-f(2) - f(-1) = 3$$

$$\therefore f(2) + f(-1) = -3$$

$$\therefore f(-1) + f(0) + f(2)$$

$$= f(0) + \{f(2) + f(-1)\} = 0 - 3 = -3$$

22. 양의 정수 전체의 집합 X 에서 Y 로의 함수 f 를 다음과 같이 정의한다.
 $f(x) = (x \text{의 약수의 개수})$ 이 때, 다음 중 $f(x) = 4$ 인 x 가 될 수 있는
것을 고르면?

① 5

② 9

③ 12

④ 15

⑤ 24

해설

5의 약수 : 1, 5 $\Rightarrow f(5) = 2$

9의 약수 : 1, 3, 9 $\Rightarrow f(9) = 3$

12의 약수 : 1, 2, 3, 4, 6, 12 $\Rightarrow f(12) = 6$

15의 약수 : 1, 3, 5, 15 $\Rightarrow f(15) = 4$

24의 약수 : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 $\Rightarrow f(24) = 8$

따라서 보기 중 $f(x) = 4$ 인 것은 15

23. 실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} 2-x & (x \text{는 유리수}) \\ x & (x \text{는 무리수}) \end{cases} \quad \text{로 정의될 때, } f(x) + f(2-x) \text{ 의 값}$$

은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$$\text{함수 } f(x) = \begin{cases} 2-x & (x \text{는 유리수}) \\ x & (x \text{는 무리수}) \end{cases} \quad \text{에서}$$

(i) x 가 유리수일 때, $2-x$ 도 유리수이므로

$$f(x) + f(2-x) = (2-x) + \{2 - (2-x)\} = 2$$

(ii) x 가 무리수일 때, $2-x$ 도 무리수이므로

$$f(x) + f(2-x) = x + (2-x) = 2$$

(i), (ii)에서 $f(x) + f(2-x) = 2$

24. $\frac{x-y}{x+2y} + \frac{x^2-y^2}{x^2+2xy} \div \frac{x-y}{x}$ 을 계산하시오.

해설

$$\begin{aligned} & \frac{x-y}{x+2y} + \frac{x^2-y^2}{x^2+2xy} \times \frac{x}{x-y} \\ &= \frac{x-y}{x+2y} + \frac{(x+y)(x-y)}{x(x+2y)} \times \frac{x}{x-y} \\ &= \frac{x-y}{x+2y} + \frac{x+y}{x+2y} = \frac{2x}{x+2y} \end{aligned}$$

25. 다항식 $f(x) = x^5 - 2x^4 - x^3 + x^2 - x - 3$ 에 대하여 $f \cdot (\sqrt{2} - 1)$ 의 값을 구하시오.

해설

$$x = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow x + 1 = \sqrt{2}$$

양변을 제곱해서 정리하면 $x^2 + 2x - 1 = 0$

$f(x)$ 를 $x^2 + 2x - 1$ 로 직접 나누면

$$f(x) = (x^2 + 2x - 1)(x^3 - 4x^2 + 8x - 19) + 45x - 22$$

$$x^2 + 2x - 1 = 0 \text{ 이므로 } f(x) = 45x - 22$$

$$\begin{aligned} \therefore f(\sqrt{2} - 1) &= 45(\sqrt{2} - 1) - 22 \\ &= 45\sqrt{2} - 67 \end{aligned}$$

해설

(1) 단계

$$x = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow x + 1 = \sqrt{2}$$

$$x^2 = -2x + 1$$

$$x^3 = x^2 \times x = -2x^2 + x = 5x - 2$$

$$x^4 = x^3 \times x = 5x^2 - 2x = -12x + 5$$

$$x^5 = x^4 \times x = -12x^2 + 5x = 29x - 12$$

(2) 단계

$$\begin{aligned} f(x) &= x^5 - 2x^4 - x^3 + x^2 - x - 3 \\ &= (29x - 12) - 2(-12x + 5) \\ &\quad - (5x - 2) + (-2x + 1) - x - 3 \\ &= 45x - 22 \end{aligned}$$

(3) 단계

$$\begin{aligned} \therefore f(\sqrt{2} - 1) &= 45(\sqrt{2} - 1) - 22 \\ &= 45\sqrt{2} - 67 \end{aligned}$$