

1. 함수 $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 그래프가 나타내는 함수의 식을 $y = f(x)$ 라 할 때, $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 접하도록 상수 a 의 값을 구하면?

- ① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

해설

함수 $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한
그래프의 식은 $y = \sqrt{2(x-a)}$
 $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는
직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로
 $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 접하려면
 $y = \sqrt{2(x-a)}$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 가 접해야 한다.
즉, $\sqrt{2(x-a)} = x$ 양변을 제곱하여 정리하면
 $x^2 - 2x + 2a = 0$
 $\frac{D}{4} = (-1)^2 - 2a = 0$ 이므로
 $a = \frac{1}{2}$

2. 무리함수 $y = -\sqrt{1-x} + 2$ 의 역함수는?

① $y = (x-2)^2 + 1 (x \leq 2)$

② $y = (x-2)^2 - 1 (x \leq 2)$

③ $y = -(x-2)^2 + 1 (x \leq 2)$

④ $y = -(x-2)^2 - 1 (x \leq 2)$

⑤ $y = -(x+2)^2 + 1 (x \leq 2)$

해설

$$y = -\sqrt{1-x} + 2 \text{ 에서 } 1-x \geq 0 \text{ 이므로 } x \leq 1$$

$$y-2 = -\sqrt{1-x} \leq 0 \text{ 이므로 } y \leq 2$$

$$1-x = (y-2)^2, \quad x = -(y-2)^2 + 1$$

x, y 를 바꾸면 구하는 역함수는

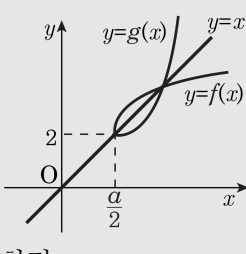
$$\therefore y = -(x-2)^2 + 1 (x \leq 2)$$

3. 무리함수 $f(x) = \sqrt{2x-a} + 2$ 의 그래프와 그 역함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 두 교점 사이의 거리가 $2\sqrt{2}$ 일 때, a 의 값을 구하면?

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ 4

해설

다음 그림에서 알 수 있듯
 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 교
 점은
 $y = f(x)$ 의 그래프와
 직선 $y = x$ 의 교점과 같다.



두 교점의 좌표를 각각 (α, α) , (β, β) 라 하면
 두 교점 사이의 거리가 $2\sqrt{2}$ 이므로
 $\sqrt{(\alpha-\beta)^2 + (\alpha-\beta)^2} = 2\sqrt{2}$
 $\therefore (\alpha-\beta)^2 = 4 \cdots \textcircled{1}$
 한편, $f(x) = \sqrt{2x-a} + 2$ 와
 $y = x$ 의 교점의 x 좌표는
 $\sqrt{2x-a} + 2 = x$ 에서 $\sqrt{2x-a} = x-2$
 양변을 제곱하여 정리하면 $x^2 - 6x + 4 + a = 0$
 이 이차방정식의 두 근이 α, β 이므로
 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha + \beta = 6$, $\alpha\beta = 4 + a$
 $(\alpha-\beta)^2 = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta$ 이므로 $\textcircled{1}$ 에서
 $4 = 36 - 4(4+a)$, $4 + a = 8$
 $\therefore a = 4$

4. 함수 $y = \sqrt{x-1} + 2$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때 $g(3)$ 의 값은?

① 3

② 2

③ 0

④ $2 + \sqrt{2}$

⑤ 4

해설

$y = \sqrt{x-1} + 2$ 에서

$y - 2 = \sqrt{x-1}$ 이 식의 양변을 제곱하면

$y^2 - 4y + 4 = x - 1$

$x = y^2 - 4y + 4 + 1$

따라서 $g(x) = x^2 - 4x + 5$ ($x \geq 2$) 이므로

$g(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 5 = 9 - 12 + 5 = 2$

5. 함수 $f(x) = \sqrt{2x+1}$ 의 역함수를 $y = g(x)$ 라 할 때, 좌표평면 위에서 두 곡선 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 교점의 좌표를 구하면?

① $(-1, -1)$

② $(0, 0)$

③ $(1, 1)$

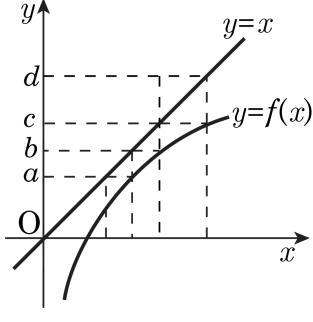
④ $(2, 2)$

⑤ $(3, 3)$

해설

$y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 는 서로 역함수이므로
두 함수의 그래프의 교점은 $y = f(x)$ 와
직선 $y = x$ 의 교점과 일치한다.
따라서 $\sqrt{2x+3} = x$ 의 양변을 제곱하여
정리하면 $x^2 - 2x - 3 = 0$, $(x+1)(x-3) = 0$
 $\therefore x = -1, 3$
 $x \geq 0$ 이므로 $x = 3$
즉, 교점의 좌표는 $(3, 3)$ 이다.

6. 아래의 그림은 두 함수 $y = f(x)$, $y = x$ 의 그래프이다. $f^{-1}(b)$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

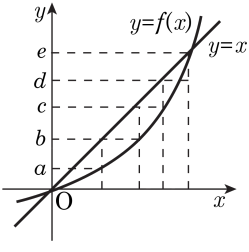
▷ 정답 : c

해설

$f^{-1}(b) = k$ 라 하면 $f(k) = b$
 $f(c) = b$ 이므로 $k = c$
따라서 $f^{-1}(b) = c$

7. 다음 그림은 두 함수 $y = f(x)$ 와 $y = x$ 의 그래프이다. $(f \circ f \circ f)^{-1}(a)$ 의 값은?

- ① a ② b ③ c ④ d ⑤ e



해설

$$\begin{aligned}(f \circ f \circ f)^{-1}(a) &= (f^{-1} \circ f^{-1} \circ f^{-1})(a) \\ &= f^{-1}(f^{-1}(b)) \\ &= f^{-1}(c) = d\end{aligned}$$

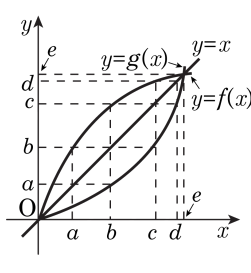
8. 다음 그림은 세 함수 $y = f(x), y = g(x), y = x$ 의 그래프이다. 이 때, $(f \circ g \circ f)(b)$ 의 값을 구하면? (단, 모든 점선은 x 축, 또는 y 축에 평행하다.)

- ① a

② b

③ c
- ④ d

⑤ e



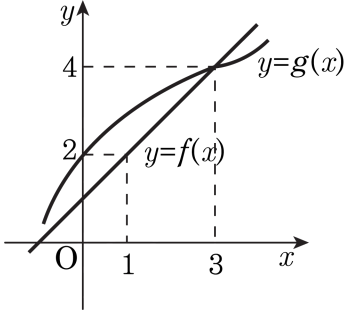
해설

$f(b)$ 의 값에 대응하는 x 좌표는 $y = x$ 의 $f(b) = x$ 값이고
 이때 $x = c, g(c)$ 의 값에 대응하는 x 좌표는 $y = x$ 의 $g(c) = x$ 값이고
 이때 $x = b, f(b) = c$ 이므로
 $\therefore c$

해설

그림에서 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 역함수 관계이므로
 $(f \circ g \circ f)(b) = f(b) = c$

9. 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 가 각각 일대일대응이고 그 그래프가 다음 그림과 같을 때, $(g^{-1} \circ f)(1) + g(3)$ 의 값은 얼마인가?

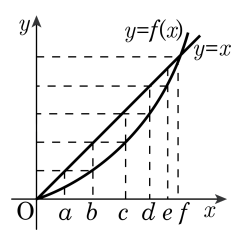


- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 7

해설

주어진 식을 간단히 하면
 $(g^{-1} \circ f)(1) + g(3) = g^{-1}(f(1)) + 4$
 $= g^{-1}(2) + 4$
 $g^{-1}(2) = k$ 로 놓으면 $g(k) = 2$
문제의 그림에서 $y = g(x)$ 의 그래프가
 $(0, 2)$ 를 지나므로 $g(0) = 2$
이 때, $y = g(x)$ 는 일대일대응이므로 $k = 0$
 $\therefore g^{-1}(2) + 4 = 0 + 4 = 4$

10. 다음 그림에서 곡선은 함수 $y = f(x)$ 의 그래프이고 직선은 $y = x$ 의 그래프이다. $(f \circ f)(d) + (g \circ g)(c)$ 를 구하면? (단, $g(x) = f^{-1}(x)$ 이다.)



- ① $2a$ ② $b + e$ ③ $c + d$
④ $2c$ ⑤ $b + c$

해설

$(f \circ f)(d) = b, (g \circ g)(c) = e$
 f 와 g 는 역함수 관계. 즉 $y = x$ 에 대칭이다.

11. $x = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, $y = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ 일 때, $(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \div (\sqrt{x} + \sqrt{y})$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

해설

$$x = (\sqrt{2} + 1)^2 = 3 + 2\sqrt{2}$$

$$\therefore \sqrt{x} = \sqrt{2} + 1$$

$$y = (\sqrt{2} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$\therefore \sqrt{y} = \sqrt{2} - 1$$

$$\therefore (\text{준식}) = 2 \div 2\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

12. $x = \sqrt{3 + \sqrt{5}}$, $y = \sqrt{3 - \sqrt{5}}$ 일 때, 식 $\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}$ 의 값은?

- ① $\frac{2}{5}\sqrt{5}$ ② $-\frac{2}{5}\sqrt{5}$ ③ $\frac{4}{5}\sqrt{5}$
 ④ $-\frac{4}{5}\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{5}$

해설

$x = \sqrt{3 + \sqrt{5}}$, $y = \sqrt{3 - \sqrt{5}}$ 에서

$$\begin{cases} xy = \sqrt{9-5} = 2 \\ x^2 + y^2 = 6 \\ x^2 - y^2 = 2\sqrt{5} \end{cases} \quad \text{를 준식에 대입}$$

$$\begin{aligned} (\text{준식}) &= \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{(x-y)(x+y)} \\ &= \frac{x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2}{x^2 - y^2} \\ &= \frac{4xy}{x^2 - y^2} = \frac{4 \times 2}{2\sqrt{5}} \\ &= \frac{4\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

13. $x = 2 + \sqrt{3}$, $y = 2 - \sqrt{3}$ 일 때 $x\sqrt{y} + y\sqrt{x}$ 의 값은?

- ① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{5}$ ④ $\sqrt{6}$ ⑤ $\sqrt{7}$

해설

$$\sqrt{x} = \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{y} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{6}, \quad \sqrt{xy} = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore x\sqrt{y} + y\sqrt{x} &= \sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \\ &= 1 \times \sqrt{6} = \sqrt{6} \end{aligned}$$

14. $x = \sqrt{2} + 1$, $y = \sqrt{2} - 1$ 일 때,

$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ 의 값은?

① 1

② $\sqrt{2}$

③ 2

④ $2\sqrt{2}$

⑤ $\sqrt{3}$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \\ &= \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{x - y} \\ &= \frac{x + y - 2\sqrt{xy} + x + y + 2\sqrt{xy}}{x - y} = \frac{2(x + y)}{x - y} \\ & \begin{cases} x + y = \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} - 1 = 2\sqrt{2} \\ x - y = \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} + 1 = 2 \end{cases} \\ & \therefore \frac{2(x + y)}{x - y} = \frac{2 \times 2\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

15. 다음 등식 $x = \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \cdots}}}$ 을 만족하는 x 값을 간단히 한 것은?

- ① $\frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}$ ② $\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$ ③ 1.5
 ④ $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{7})$ ⑤ $\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

해설

$$\begin{aligned}
 x &= \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \cdots}}} \\
 &= \sqrt{\frac{3}{2} + x} \\
 \Rightarrow x^2 &= \frac{3}{2} + x \\
 \Rightarrow x^2 - x - \frac{3}{2} &= 0 \\
 x &= \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2} \\
 x &= \frac{1 + \sqrt{7}}{2} (\because x > 0)
 \end{aligned}$$

16. 무리식 $\sqrt{2-x} + \frac{1}{\sqrt{x+3}}$ 의 값이 실수가 되도록 x 의 범위를 정할 때, 정수 x 의 개수는?

- ① 2개 ② 3개 ③ 4개 ④ 5개 ⑤ 6개

해설

$$2-x \geq 0, x+3 > 0$$

$\therefore -3 < x \leq 2$ 이므로 정수의 개수는 5개

17. 다음 무리식의 값이 실수가 되도록 x 의 범위를 정하면?

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{2-x} + \sqrt{x-1}$$

- ① $-2 \leq x \leq 1$ ② $0 \leq x \leq 1$ ③ $1 < x < 2$
④ $-1 \leq x \leq 2$ ⑤ $1 \leq x \leq 2$

해설

$x+1 \geq 0 \quad \therefore x \geq -1$
 $2-x \geq 0 \quad \therefore x \leq 2$
 $x-1 \geq 0 \quad \therefore x \geq 1$
공통부분을 구하면 $1 \leq x \leq 2$

18. $f(x) = 2x + 3$ 일 때, $g(x)$ 가 $(g \circ f)^{-1}(x) = 2x$ 를 만족시킨다고 한다. 이 때, $g(1)$ 의 값은?

- ① $-\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $-\frac{1}{5}$

해설

$$(g \circ f)^{-1}(x) = 2x \text{ 이므로 } (g \circ f)(x) = \frac{1}{2}x$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 3) = \frac{1}{2}x$$

$$\text{여기서 } 2x + 3 = t \text{ 라 하면 } x = \frac{t - 3}{2}$$

$$\therefore g(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{t - 3}{2}$$

$$\therefore g(1) = -\frac{1}{2}$$

19. 실수 전체 집합에서 정의된 함수 f 에 대하여 $f(3x+2) = 6x-3$ 이다. 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $g(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$f(3x+2) = 6x-3$ 에서 $3x+2 = t$ 라 하면

$f(t) = 2t-7$ 이므로 $f(x) = 2x-7$

$$\therefore g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

$$\therefore g(3) = \frac{3}{2} + \frac{7}{2} = 5$$

20. 다음 함수의 역함수를 구하면?

$$y = x^2 - 3(\text{단, } x \geq 0)$$

① $y = \sqrt{x+1}(\text{단, } x \geq -1)$

② $y = \sqrt{x+2}(\text{단, } x \geq -2)$

③ $y = \sqrt{x+3}(\text{단, } x \geq -3)$

④ $y = \sqrt{x+4}(\text{단, } x \geq -4)$

⑤ $y = \sqrt{x+5}(\text{단, } x \geq -5)$

해설

$x \geq 0$ 이면 $y = x^2 - 3 \geq -3$ 이므로 주어진 함수의 치역은 $\{y \mid y \geq -3\}$
한편, $y = x^2 - 3$ 을 x 에 대하여 풀면
 $x^2 = y + 3$ 에서 $x = \pm \sqrt{y+3}$
이 때, $x \geq 0$ 이어야 하므로
 $x = \sqrt{y+3}(\text{단, } y \geq -3)$
여기서, x, y 를 서로 바꾸면
구하는 역함수는 $y = \sqrt{x+3}(\text{단, } x \geq -3)$

21. 함수 $f(x) = ax - 1$ 과 그 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 같도록 상수 a 의 값을 정하면?

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 5

해설

$y = f(x)$ 라 하면 $y = ax - 1$

이것을 x 에 대하여 정리하면 $ax = y + 1$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x + \frac{1}{a}$$

그런데 $f(x) = f^{-1}(x)$ 이고 모든 실수에 대하여 성립해야 하므로

$$\frac{1}{a}x + \frac{1}{a} = ax - 1$$

$$\therefore \frac{1}{a} = a \text{ 이고 } \frac{1}{a} = -1 \text{ 이어야 하므로}$$

$$\therefore a = -1$$

22. 함수 $f(x) = 4x - 1$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, 함수 $f(3x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 로 나타내면 무엇인가?

① $g\left(\frac{x}{3}\right)$

② $3g(x)$

③ $g(3x)$

④ $\frac{1}{3}g(3x)$

⑤ $\frac{1}{3}g(x)$

해설

$f(x) = 4x - 1$ 에서 $f(x)$ 를 y 로 놓고

$y = 4x - 1$ 을 x 에 관하여 정리하면

$$x = \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}$$

이 때, x 와 y 를 바꾸면

$$f^{-1}(x) = g(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$$

또, $f(3x) = 12x - 1$ 에서 $f(3x) = y$ 로 놓고

$y = 12x - 1$ 을 x 에 관하여 정리하면

$$x = \frac{1}{12}y + \frac{1}{12}$$

$$\therefore f^{-1}(3x) = \frac{1}{12}x + \frac{1}{12} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{3}g(x)$$

23. 무리식 $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}-2}$ 의 값이 실수가 되도록 x 의 값의 범위를 정하십시오.

해설

(1) 단계

$$x+1 \geq 0, x \geq 0$$

(2) 단계

$$x \neq 4 \text{ 이므로}$$

(3) 단계

$$\therefore 0 \leq x < 4, x > 4$$