

1. 함수  $y = \sqrt{2x}$  의 그래프를  $x$  축의 방향으로  $a$  만큼 평행이동한 그래프가 나타내는 함수의 식을  $y = f(x)$  라 할 때,  $y = f(x)$  와  $y = f^{-1}(x)$  의 그래프가 접하도록 상수  $a$  의 값을 구하면?

①  $-\frac{1}{2}$

②  $-\frac{1}{4}$

③ 0

④  $\frac{1}{4}$

⑤  $\frac{1}{2}$

### 해설

함수  $y = \sqrt{2x}$  의 그래프를

$x$  축의 방향으로  $a$  만큼 평행이동한

그래프의 식은  $y = \sqrt{2(x-a)}$

$y = f(x)$  와  $y = f^{-1}(x)$  의 그래프는

직선  $y = x$  에 대하여 대칭이므로

$y = f(x)$  와  $y = f^{-1}(x)$  의 그래프가 접하려면

$y = \sqrt{2(x-a)}$  의 그래프와 직선  $y = x$  가 접해야 한다.

즉,  $\sqrt{2(x-a)} = x$  양변을 제곱하여 정리하면

$$x^2 - 2x + 2a = 0$$

$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - 2a = 0 \text{ 이므로}$$

$$a = \frac{1}{2}$$

2. 무리함수  $y = -\sqrt{1-x} + 2$ 의 역함수는?

①  $y = (x-2)^2 + 1 (x \leq 2)$

②  $y = (x-2)^2 - 1 (x \leq 2)$

③  $y = -(x-2)^2 + 1 (x \leq 2)$

④  $y = -(x-2)^2 - 1 (x \leq 2)$

⑤  $y = -(x+2)^2 + 1 (x \leq 2)$

해설

$$y = -\sqrt{1-x} + 2 \text{에서 } 1-x \geq 0 \text{이므로 } x \leq 1$$

$$y-2 = -\sqrt{1-x} \leq 0 \text{이므로 } y \leq 2$$

$$1-x = (y-2)^2, x = -(y-2)^2 + 1$$

$x, y$ 를 바꾸면 구하는 역함수는

$$\therefore y = -(x-2)^2 + 1 (x \leq 2)$$

3. 무리함수  $f(x) = \sqrt{2x-a} + 2$ 의 그래프와 그 역함수  $y = g(x)$ 의 그래프의 두 교점 사이의 거리가  $2\sqrt{2}$ 일 때,  $a$ 의 값을 구하면?

①  $\frac{1}{4}$

②  $\frac{1}{2}$

③  $\sqrt{2}$

④ 2

⑤ 4

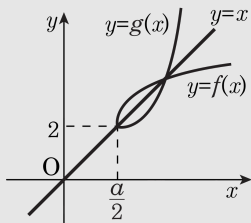
### 해설

다음 그림에서 알 수 있듯

$y = f(x)$ 와  $y = g(x)$ 의 그래프의 교점은

$y = f(x)$ 의 그래프와

직선  $y = x$ 의 교점과 같다.



두 교점의 좌표를 각각  $(\alpha, \alpha)$ ,  $(\beta, \beta)$ 라 하면

두 교점 사이의 거리가  $2\sqrt{2}$ 이므로

$$\sqrt{(\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore (\alpha - \beta)^2 = 4 \dots \textcircled{1}$$

한편,  $f(x) = \sqrt{2x-a} + 2$ 와

$y = x$ 의 교점의  $x$  좌표는

$$\sqrt{2x-a} + 2 = x \text{에서 } \sqrt{2x-a} = x - 2$$

양변을 제곱하여 정리하면  $x^2 - 6x + 4 + a = 0$

이 이차방정식의 두 근이  $\alpha, \beta$ 이므로

근과 계수의 관계에 의해  $\alpha + \beta = 6$ ,  $\alpha\beta = 4 + a$

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \text{이므로 } \textcircled{1} \text{에서}$$

$$4 = 36 - 4(4 + a), 4 + a = 8$$

$$\therefore a = 4$$

4. 함수  $y = \sqrt{x-1} + 2$  의 역함수를  $g(x)$  라 할 때  $g(3)$  의 값은?

① 3

② 2

③ 0

④  $2 + \sqrt{2}$

⑤ 4

해설

$$y = \sqrt{x-1} + 2 \text{ 에서}$$

$$y - 2 = \sqrt{x-1} \text{ 이 식의 양변을 제곱하면}$$

$$y^2 - 4y + 4 = x - 1$$

$$x = y^2 - 4y + 4 + 1$$

$$\text{따라서 } g(x) = x^2 - 4x + 5 \quad (x \geq 2) \text{ 이므로}$$

$$g(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 5 = 9 - 12 + 5 = 2$$

5. 함수  $f(x) = \sqrt{2x+1}$ 의 역함수를  $y = g(x)$ 라 할 때, 좌표평면 위에서 두 곡선  $y = f(x)$ 와  $y = g(x)$ 의 그래프의 교점의 좌표를 구하면?

①  $(-1, -1)$

②  $(0, 0)$

③  $(1, 1)$

④  $(2, 2)$

⑤  $(3, 3)$

### 해설

$y = f(x)$ 와  $y = g(x)$ 는 서로 역함수이므로  
두 함수의 그래프의 교점은  $y = f(x)$ 와  
직선  $y = x$ 의 교점과 일치한다.

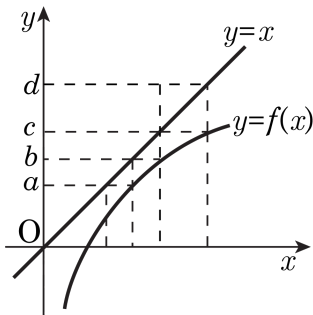
따라서  $\sqrt{2x+3} = x$ 의 양변을 제곱하여  
정리하면  $x^2 - 2x - 3 = 0$ ,  $(x+1)(x-3) = 0$

$$\therefore x = -1, 3$$

$x \geq 0$  이므로  $x = 3$

즉, 교점의 좌표는  $(3, 3)$ 이다.

6. 아래의 그림은 두 함수  $y = f(x)$ ,  $y = x$ 의 그래프이다.  $f^{-1}(b)$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 :  $c$

해설

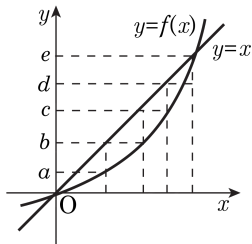
$f^{-1}(b) = k$  라 하면  $f(k) = b$

$f(c) = b$  이므로  $k = c$

따라서  $f^{-1}(b) = c$

7. 다음 그림은 두 함수  $y = f(x)$  와  $y = x$  의 그래프이다.  $(f \circ f \circ f)^{-1}(a)$  의 값은?

①  $a$     ②  $b$     ③  $c$     ④  $d$     ⑤  $e$

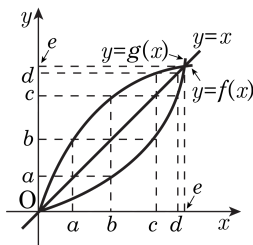


해설

$$\begin{aligned}(f \circ f \circ f)^{-1}(a) &= (f^{-1} \circ f^{-1} \circ f^{-1})(a) \\ &= f^{-1}(f^{-1}(b)) \\ &= f^{-1}(c) = d\end{aligned}$$

8. 다음 그림은 세 함수  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$ ,  $y = x$  의 그래프이다. 이 때,  $(f \circ g \circ f)(b)$  의 값을 구하면? (단, 모든 점선은  $x$  축, 또는  $y$  축에 평행하다.)

- ①  $a$                       ②  $b$                       ③  $c$   
 ④  $d$                       ⑤  $e$



### 해설

$f(b)$  의 값에 대응하는  $x$  좌표는

$y = x$  의  $f(b) = x$  값이고

이때  $x = c$ ,  $g(c)$  의 값에 대응하는  $x$  좌표는

$y = x$  의  $g(c) = x$  값이고

이때  $x = b$ ,  $f(b) = c$  이므로

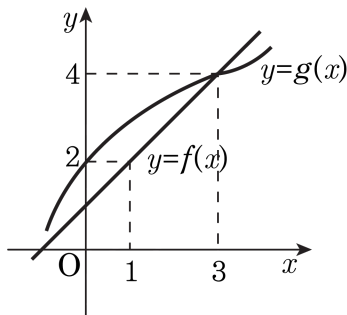
$\therefore c$

### 해설

그림에서  $f(x)$  와  $g(x)$  는 역함수 관계이므로

$$(f \circ g \circ f)(b) = f(b) = c$$

9. 두 함수  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$ 가 각각 일대일대응이고 그 그래프가 다음 그림과 같을 때,  $(g^{-1} \circ f)(1) + g(3)$ 의 값은 얼마인가?



① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 7

### 해설

주어진 식을 간단히 하면

$$\begin{aligned}(g^{-1} \circ f)(1) + g(3) &= g^{-1}(f(1)) + 4 \\ &= g^{-1}(2) + 4\end{aligned}$$

$g^{-1}(2) = k$ 로 놓으면  $g(k) = 2$

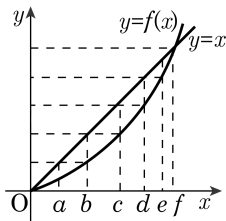
문제의 그림에서  $y = g(x)$ 의 그래프가

$(0, 2)$ 를 지나므로  $g(0) = 2$

이 때,  $y = g(x)$ 는 일대일대응이므로  $k = 0$

$$\therefore g^{-1}(2) + 4 = 0 + 4 = 4$$

10. 다음 그림에서 곡선은 함수  $y = f(x)$  의 그래프이고 직선은  $y = x$ 의 그래프이다.  $(f \circ f)(d) + (g \circ g)(c)$ 를 구하면? (단,  $g(x) = f^{-1}(x)$ 이다.)



①  $2a$

②  $b + e$

③  $c + d$

④  $2c$

⑤  $b + c$

해설

$$(f \circ f)(d) = b, (g \circ g)(c) = e$$

$f$ 와  $g$ 는 역함수 관계. 즉  $y = x$ 에 대칭이다.

11.  $x = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ ,  $y = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$  일 때,  $(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \div (\sqrt{x} + \sqrt{y})$  의 값은?

- ①  $\frac{1}{2}$       ②  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       ③  $\sqrt{2}$       ④  $2\sqrt{2}$       ⑤  $3\sqrt{2}$

해설

$$x = (\sqrt{2} + 1)^2 = 3 + 2\sqrt{2}$$

$$\therefore \sqrt{x} = \sqrt{2} + 1$$

$$y = (\sqrt{2} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$\therefore \sqrt{y} = \sqrt{2} - 1$$

$$\therefore (\text{준식}) = 2 \div 2\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

12.  $x = \sqrt{3 + \sqrt{5}}$ ,  $y = \sqrt{3 - \sqrt{5}}$  일 때, 식  $\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}$  의 값은?

①  $\frac{2}{5}\sqrt{5}$

②  $-\frac{2}{5}\sqrt{5}$

③  $\frac{4}{5}\sqrt{5}$

④  $-\frac{4}{5}\sqrt{5}$

⑤  $\sqrt{5}$

해설

$x = \sqrt{3 + \sqrt{5}}$ ,  $y = \sqrt{3 - \sqrt{5}}$  에서

$$\begin{cases} xy = \sqrt{9 - 5} = 2 \\ x^2 + y^2 = 6 \\ x^2 - y^2 = 2\sqrt{5} \end{cases} \quad \text{를 준식에 대입}$$

$$\begin{aligned} (\text{준식}) &= \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{(x-y)(x+y)} \\ &= \frac{x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2}{x^2 - y^2} \\ &= \frac{4xy}{x^2 - y^2} = \frac{4 \times 2}{2\sqrt{5}} \\ &= \frac{4\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

13.  $x = 2 + \sqrt{3}$ ,  $y = 2 - \sqrt{3}$  일 때  $x\sqrt{y} + y\sqrt{x}$  의 값은?

①  $\sqrt{2}$

②  $\sqrt{3}$

③  $\sqrt{5}$

④  $\sqrt{6}$

⑤  $\sqrt{7}$

해설

$$\sqrt{x} = \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{y} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{6}, \quad \sqrt{xy} = 1$$

$$\begin{aligned}\therefore x\sqrt{y} + y\sqrt{x} &= \sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \\ &= 1 \times \sqrt{6} = \sqrt{6}\end{aligned}$$

14.  $x = \sqrt{2} + 1$ ,  $y = \sqrt{2} - 1$  일 때,

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \text{ 의 값은?}$$

① 1

②  $\sqrt{2}$

③ 2

④  $2\sqrt{2}$

⑤  $\sqrt{3}$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \\ &= \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{x - y} \\ &= \frac{x + y - 2\sqrt{xy} + x + y + 2\sqrt{xy}}{x - y} = \frac{2(x + y)}{x - y} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x + y = \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} - 1 = 2\sqrt{2} \\ x - y = \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} + 1 = 2 \end{cases}$$

$$\therefore \frac{2(x + y)}{x - y} = \frac{2 \times 2\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

15. 다음 등식  $x = \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{2} + \cdots}}}}$  을 만족하는  $x$  값을 간단히 한 것은?

①  $\frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}$

②  $\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$

③ 1.5

④  $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{7})$

⑤  $\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

해설

$$x = \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{2} + \cdots}}}}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2} + x}$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{3}{2} + x$$

$$\Rightarrow x^2 - x - \frac{3}{2} = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{7}}{2} (\because x > 0)$$

16. 무리식  $\sqrt{2-x} + \frac{1}{\sqrt{x+3}}$  의 값이 실수가 되도록  $x$ 의 범위를 정할 때,  
정수  $x$ 의 개수는?

① 2개

② 3개

③ 4개

④ 5개

⑤ 6개

해설

$$2 - x \geq 0, x + 3 > 0$$

$\therefore -3 < x \leq 2$  이므로 정수의 개수는 5개

17. 다음 무리식의 값이 실수가 되도록  $x$ 의 범위를 정하면?

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{2-x} + \sqrt{x-1}$$

①  $-2 \leq x \leq 1$

②  $0 \leq x \leq 1$

③  $1 < x < 2$

④  $-1 \leq x \leq 2$

⑤  $1 \leq x \leq 2$

해설

$$x+1 \geq 0 \quad \therefore x \geq -1$$

$$2-x \geq 0 \quad \therefore x \leq 2$$

$$x-1 \geq 0 \quad \therefore x \geq 1$$

공통부분을 구하면  $1 \leq x \leq 2$

18.  $f(x) = 2x + 3$  일 때,  $g(x)$  가  $(g \circ f)^{-1}(x) = 2x$  를 만족시킨다고 한다.  
이 때,  $g(1)$  의 값은?

①  $-\frac{1}{2}$

②  $\frac{1}{2}$

③  $-\frac{1}{4}$

④  $\frac{1}{4}$

⑤  $-\frac{1}{5}$

해설

$$(g \circ f)^{-1}(x) = 2x \text{ 이므로 } (g \circ f)(x) = \frac{1}{2}x$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 3) = \frac{1}{2}x$$

$$\text{여기서 } 2x + 3 = t \text{ 라 하면 } x = \frac{t-3}{2}$$

$$\therefore g(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{t-3}{2}$$

$$\therefore g(1) = -\frac{1}{2}$$

19. 실수 전체 집합에서 정의된 함수  $f$ 에 대하여  $f(3x+2) = 6x-3$ 이다.  
함수  $f(x)$ 의 역함수를  $g(x)$ 라 할 때,  $g(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$f(3x+2) = 6x-3$ 에서  $3x+2 = t$ 라 하면

$f(t) = 2t-7$ 이므로  $f(x) = 2x-7$

$$\therefore g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

$$\therefore g(3) = \frac{3}{2} + \frac{7}{2} = 5$$

20. 다음 함수의 역함수를 구하면?

$$y = x^2 - 3 \text{ (단, } x \geq 0 \text{)}$$

①  $y = \sqrt{x+1}$  (단,  $x \geq -1$ )

②  $y = \sqrt{x+2}$  (단,  $x \geq -2$ )

③  $y = \sqrt{x+3}$  (단,  $x \geq -3$ )

④  $y = \sqrt{x+4}$  (단,  $x \geq -4$ )

⑤  $y = \sqrt{x+5}$  (단,  $x \geq -5$ )

해설

$x \geq 0$ 이면  $y = x^2 - 3 \geq -3$  이므로 주어진 함수의 치역은  $\{y \mid y \geq -3\}$

한편,  $y = x^2 - 3$  을  $x$  에 대하여 풀면

$$x^2 = y + 3 \text{ 에서 } x = \pm \sqrt{y+3}$$

이 때,  $x \geq 0$  이어야 하므로

$$x = \sqrt{y+3} \text{ (단, } y \geq -3 \text{)}$$

여기서,  $x, y$  를 서로 바꾸면

$$\text{구하는 역함수는 } y = \sqrt{x+3} \text{ (단, } x \geq -3 \text{)}$$

21. 함수  $f(x) = ax - 1$  과 그 역함수  $f^{-1}(x)$  가 같도록 상수  $a$  의 값을 정하면?

①

-1

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 5

해설

$y = f(x)$  라 하면  $y = ax - 1$

이것을  $x$  에 대하여 정리하면  $ax = y + 1$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x + \frac{1}{a}$$

그런데  $f(x) = f^{-1}(x)$  이고 모든 실수에 대하여 성립해야 하므로

$$\frac{1}{a}x + \frac{1}{a} = ax - 1$$

$\therefore \frac{1}{a} = a$  이고  $\frac{1}{a} = -1$  이어야 하므로

$$\therefore a = -1$$

22. 함수  $f(x) = 4x - 1$ 의 역함수를  $g(x)$ 라 할 때, 함수  $f(3x)$ 의 역함수를  $g(x)$ 로 나타내면 무엇인가?

①  $g\left(\frac{x}{3}\right)$

②  $3g(x)$

③  $g(3x)$

④  $\frac{1}{3}g(3x)$

⑤  $\frac{1}{3}g(x)$

해설

$f(x) = 4x - 1$ 에서  $f(x)$ 를  $y$ 로 놓고

$y = 4x - 1$ 을  $x$ 에 관하여 정리하면

$$x = \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}$$

이 때,  $x$ 와  $y$ 를 바꾸면

$$f^{-1}(x) = g(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$$

또,  $f(3x) = 12x - 1$ 에서  $f(3x) = y$ 로 놓고

$y = 12x - 1$ 을  $x$ 에 관하여 정리하면

$$x = \frac{1}{12}y + \frac{1}{12}$$

$$\therefore f^{-1}(3x) = \frac{1}{12}x + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3}g(x)$$

23. 무리식  $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}-2}$  의 값이 실수가 되도록  $x$  의 값의 범위를 정하시오.

해설

(1) 단계

$$x+1 \geq 0, x \geq 0$$

(2) 단계

$$x \neq 4 \text{ 이므로}$$

(3) 단계

$$\therefore 0 \leq x < 4, x > 4$$