

1. 함수  $y = \sqrt{x-1} + 2$  의 역함수를  $g(x)$ 라 할 때  $g(3)$ 의 값은?

① 3

② 2

③ 0

④  $2 + \sqrt{2}$

⑤ 4

해설

$y = \sqrt{x-1} + 2$ 에서

$y - 2 = \sqrt{x-1}$  이 식의 양변을 제곱하면

$$y^2 - 4y + 4 = x - 1$$

$$x = y^2 - 4y + 4 + 1$$

따라서  $g(x) = x^2 - 4x + 5$  ( $x \geq 2$ ) 이므로

$$g(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 5 = 9 - 12 + 5 = 2$$

2. 두 곡선  $y = \sqrt{x+1}$ ,  $x = \sqrt{y+1}$  의 교점의 좌표를 구하면?

①  $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{3}, \frac{1+\sqrt{5}}{3}\right)$

②  $\left(\frac{2+\sqrt{5}}{2}, \frac{2+\sqrt{5}}{2}\right)$

③  $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

④  $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

⑤  $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

해설

두 곡선  $y = \sqrt{x+1}$  과  $x = \sqrt{y+1}$  은

직선  $y = x$ 에 대하여 대칭이므로

$y = \sqrt{x+1}$  과  $y = x$  의 교점을 구하면 된다.

$\therefore \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

3. 정의역이  $\{x \mid x > 1\}$ 인 두 함수  $f(x) = \frac{1}{x+1}$ ,  $g(x) = \sqrt{3(x-1)}$ 에 대하여  $(f \circ g)^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$ 의 값은?

- ① 2      ② 4      ③ 6      ④ 8      ⑤ 10

해설

$$(f \circ g)^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = a \text{라 하면}$$
$$(f \circ g)(a) = \frac{1}{4} \text{이고}$$
$$f(g(a)) = f(\sqrt{3(a-1)})$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3(a-1)}+1} \text{이므로}$$
$$\frac{1}{\sqrt{3(a-1)}+1} = \frac{1}{4}$$
$$\sqrt{3(a-1)}+1 = 4,$$
$$\sqrt{3(a-1)} = 3$$
$$3(a-1) = 9, a-1 = 3, a = 4$$
$$\therefore (f \circ g)^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = 4$$

4. 다음 무리식의 값이 실수가 되도록  $x$ 의 범위를 정하면?

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{2-x} + \sqrt{x-1}$$

- ①  $-2 \leq x \leq 1$       ②  $0 \leq x \leq 1$       ③  $1 < x < 2$   
④  $-1 \leq x \leq 2$       ⑤  $1 \leq x \leq 2$

해설

$$x+1 \geq 0 \quad \therefore x \geq -1$$

$$2-x \geq 0 \quad \therefore x \leq 2$$

$$x-1 \geq 0 \quad \therefore x \geq 1$$

공통부분을 구하면  $1 \leq x \leq 2$

5. 무리식  $\sqrt{2-x} + \frac{1}{\sqrt{x+3}}$  의 값이 실수가 되도록  $x$ 의 범위를 정할 때, 정수  $x$ 의 개수는?

① 2개      ② 3개      ③ 4개      ④ 5개      ⑤ 6개

해설

$$2-x \geq 0, x+3 > 0$$

$\therefore -3 < x \leq 2$  이므로 정수의 개수는 5개

6.  $\frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}$  가  $x$  에 대한 항등식일 때, 상수  $a^2 + b^2$  의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{(a+b)x-a}{x(x-1)}$$

따라서,  $a+b=1$ ,  $a=-1$

$\therefore a=-1$ ,  $b=2$

$\therefore a^2 + b^2 = (-1)^2 + 2^2 = 5$

7.  $x^2 \neq 4$ 인 모든 실수  $x$ 에 대하여  $\frac{x+6}{x^2-4} = \frac{a}{x+2} - \frac{b}{x-2}$ 을 만족시키는 상수  $a$ 와  $b$ 가 있다. 이때,  $a+b$ 의 값은?

① -6      ② -3      ③ -1      ④ 2      ⑤ 4

해설

$\frac{x+6}{x^2-4} = \frac{a}{x+2} - \frac{b}{x-2}$ 의 우변을 통분하여 계산하면

$$\begin{aligned}\frac{a}{x+2} - \frac{b}{x-2} &= \frac{a(x-2)}{x^2-4} - \frac{b(x+2)}{x^2-4} \\ &= \frac{(a-b)x - 2(a+b)}{x^2-4}\end{aligned}$$

따라서  $a-b=1$ ,  $-2(a+b)=6$

$\therefore a=-1$ ,  $b=-2$

$\therefore a+b=-1-2=-3$

8.  $x^2 \neq 4$ 인 모든 실수  $x$ 에 대하여  $\frac{x+6}{x^2-4} = \frac{a}{x+2} - \frac{b}{x-2}$ 을 만족시키는 상수  $a$ 와  $b$ 가 있다. 이때,  $a+b$ 의 값은?

① -6      ② -3      ③ -1      ④ 2      ⑤ 4

해설

$\frac{x+6}{x^2-4} = \frac{a}{x+2} - \frac{b}{x-2}$ 의 우변을 통분하여 계산하면

$$\begin{aligned}\frac{a}{x+2} - \frac{b}{x-2} &= \frac{a(x-2)}{x^2-4} - \frac{b(x+2)}{x^2-4} \\ &= \frac{(a-b)x - 2(a+b)}{x^2-4}\end{aligned}$$

따라서  $a-b=1$ ,  $-2(a+b)=6$ 이므로 연립하여 풀면

$$a=-1, b=-2$$

$$\therefore a+b=-3$$

9.  $\frac{x+3}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$ 을 만족할 때,  $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\begin{aligned}\frac{x+3}{(x+1)(x+2)} &= \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} \\ &= \frac{(a+b)x + 2a + b}{(x+1)(x+2)}\end{aligned}$$

$$a+b=1, 2a+b=3$$

$$\therefore a=2, b=-1$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 2^2 + (-1)^2 = 5$$

10. 등식  $\frac{3x}{x^3+1} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$  가  $x$ 에 대한 항등식이 되도록 상수  $a, b, c$ 의 값을 정할 때,  $a+b+c$ 의 값은?

① -3      ② -1      ③ 0      ④ 1      ⑤ 3

해설

$$\begin{aligned}(\text{우변}) &= \frac{a(x^2-x+1) + (bx+c)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} \\ &= \frac{(a+b)x^2 + (-a+b+c)x + a+c}{x^3+1}\end{aligned}$$

주어진 등식이  $x$ 에 대한 항등식이 되려면

$$a+b=0, -a+b+c=3, a+c=0$$

이것을 풀면

$$a=-1, b=1, c=1$$

$$\therefore a+b+c=1$$

11.  $X = \{-1, 0, 1\}$ ,  $Y = \{0, 1, 2, 3\}$  일 때,  $x \in X$  인 임의의  $x$ 에 대한 다음의 대응 중에서 함수가 아닌 것은?

①  $x \rightarrow 1$

②  $x \rightarrow |x|$

③  $x \rightarrow x^2 + 1$

④  $x \rightarrow 2x$

⑤  $x \rightarrow x^2 + x + 1$

해설

④  $f(-1) = -2$  이므로 함숫값이 공역에 존재하지 않으므로 함수가 아니다.

12. 두 집합  $X = \{-1, 1, 2\}$ ,  $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 다음 중  $X$ 에서  $Y$ 로의 함수인 것을 모두 고르면?

|                                                     |                                                        |
|-----------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| $\textcircled{\tiny \neg} f : x \rightarrow x$      | $\textcircled{\tiny \sqcup} g : x \rightarrow x + 2$   |
| $\textcircled{\tiny \ominus} h : x \rightarrow  x $ | $\textcircled{\tiny \oplus} k : x \rightarrow x^2 - 1$ |

- ①

⊔, ⊖

②

⊔, ⊔, ⊖

③

⊔, ⊖, ⊖
- ④

⊔, ⊖, ⊖
- ⑤

⊔, ⊔, ⊖

해설

$\textcircled{\tiny \neg} f(x) = x$ 에서  $f(-1) = -1$ 이고  $-1 \notin Y$ 이므로, 함수가 아니다.

$\textcircled{\tiny \sqcup} g(x) = x+2$ 에서  $g(-1) = 1 \in Y$ ,  $g(1) = 3 \in Y$ ,  $g(2) = 4 \in Y$ 이므로 함수이다.

$\textcircled{\tiny \ominus} h(x) = |x|$ 에서  $h(-1) = 1 \in Y$ ,  $h(1) = 1 \in Y$ ,  $h(2) = 2 \in Y$ 이므로 함수이다.

$\textcircled{\tiny \oplus} k(x) = x^2-1$ 에서  $k(-1) = 0 \notin Y$ ,  $k(1) = 0 \notin Y$ ,  $k(2) = 3 \in Y$ 이므로 함수가 아니다.

13. 두 집합  $X = \{-1, 0, 1\}$ ,  $Y = \{0, 1, 2, 3\}$ 에 대하여 다음 중  $X$ 에서  $Y$ 로의 함수인 것은?

①  $f : x \rightarrow x$

②  $f : x \rightarrow -2|x|$

③  $f : x \rightarrow x^2$

④  $f : x \rightarrow x + 3$

⑤  $f : x \rightarrow |3x| + 1$

해설

③  $y = f(x) = x^2$  에서

$f(-1) = (-1)^2 = 1 \in Y$ ,  $f(0) = 0^2 = 0 \in Y$ ,  $f(1) = 1^2 = 1 \in Y$   
따라서 함수이다.

14. 두 집합  $X = \{-2, -1, 0\}$ ,  $Y = \{1, 2, 3\}$  에 대하여 다음 중  $X$  에서  $Y$  로의 함수가 아닌 것은 무엇인가?
- ①  $f(x) = 1 - x$

②  $f(x) = |x| + 1$

③  $f(x) = x^2 + x + 1$

④  $f(x) = x^3 + 2$

⑤  $f(x) = |x^2 + x| + 1$

해설

각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

①

X

Y

-2

-1

0

1

2

3

-2 → 1

-1 → 2

0 → 3

②

X

Y

-2

-1

0

1

2

3

-2 → 1

-1 → 2

0 → 3

③

X

Y

-2

-1

0

1

2

3

-2 → 1

-1 → 2

0 → 3

④

X

Y

-2

-1

0

1

2

3

-2 → 1

-1 → 2

0 → 2

⑤

X

Y

-2

-1

0

1

2

3

-2 → 1

-1 → 2

0 → 3

따라서 함수가 아닌 것은 ④ 이다.

15. 다음 보기 중  $X = \{-1, 1, 2\}$ 에서  $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ 로의 함수가 될 수 있는 것은 몇 개인가?

<보기>

- $\textcircled{\tiny 1} \ f: x \rightarrow |x|^2$
- $\textcircled{\tiny 2} \ g: x \rightarrow x+2$
- $\textcircled{\tiny 3} \ h: x \rightarrow |x|+1$
- $\textcircled{\tiny 4} \ i: x \rightarrow x^2-1$
- $\textcircled{\tiny 5} \ j: x \rightarrow |x|+3$

- ① 1개
- ② 2개
- ③ 3개
- ④ 4개
- ⑤ 5개

해설

$\textcircled{\tiny 1} \ f(-1) = |-1|^2 = 1 \in Y$   
 $f(1) = |1|^2 = 1 \in Y$   
 $f(2) = |2|^2 = 4 \in Y$   
 $\textcircled{\tiny 2} \ g(-1) = -1+2 = 1 \in Y$   
 $g(1) = 1+2 = 3 \in Y$   
 $g(2) = 2+2 = 4 \in Y$   
 $\textcircled{\tiny 3} \ h(-1) = |-1|+1 = 2 \in Y$   
 $h(1) = |1|+1 = 2 \in Y$   
 $h(2) = |2|+1 = 3 \in Y$   
 $\textcircled{\tiny 4} \ i(-1) = i(1) = 0 \notin Y$   
 $\textcircled{\tiny 5} \ j(2) = 5 \notin Y$   
그러므로  $\textcircled{\tiny 4}$ ,  $\textcircled{\tiny 5}$ 는 함수가 될 수 없고  $\textcircled{\tiny 1}$ ,  $\textcircled{\tiny 2}$ ,  $\textcircled{\tiny 3}$ 개 만 함수가 될 수 있다.

16.  $X = \{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$ ,  $Y = \{y \mid -3 \leq y \leq 3\}$  에서  $f : X \rightarrow Y$ ,  $f(x) = ax + b$  (단,  $a > 0$ ) 로 정의되는 함수  $f$  가 일대일 대응이 되도록  $a$ ,  $b$  의 값을 정하면?

- ①  $a = \frac{3}{2}, b = 0$       ②  $a = \frac{1}{2}, b = 0$       ③  $a = \frac{3}{2}, b = 1$   
④  $a = \frac{5}{2}, b = 0$       ⑤  $a = 2, b = 0$

해설

$f$  가 일대일 대응이고  $a > 0$  이므로

$$\begin{cases} f(-2) = -2a + b = -3 \\ f(2) = 2a + b = 3 \end{cases}$$

$$\therefore a = \frac{3}{2}, b = 0$$

17.  $X = \{-1, 0, 1\}$ ,  $Y = \{0, 1, 2, 3\}$ 이라 한다.  $X$ 의 임의의 원소  $x$ 에 대하여 다음과 같은  $X$ 에서  $Y$ 로의 대응을 생각할 때, 이 중  $X$ 에서  $Y$ 로의 함수인 것은?

- ①  $x \rightarrow x + 3$
- ②  $x \rightarrow x^2 - 1$
- ③  $\begin{cases} x \geq 0 \text{ 일 때 } x \rightarrow 1 \\ x < 0 \text{ 일 때 } x \rightarrow 0 \end{cases}$
- ④  $\begin{cases} x \geq 0 \text{ 일 때 } x \rightarrow \text{홀수} \\ x < 0 \text{ 일 때 } x \rightarrow 2 \end{cases}$
- ⑤  $x \rightarrow x^3$

해설

$X$ 에서  $Y$ 로의 함수가 되려면  $X$ 의 원소가 빠짐없이  $Y$ 의 원소 하나에 대응해야 한다.  
 순서대로 대응도를 만들어 보면 다음과 같다.

①

②

③

④

⑤

①, ②, ⑤는  $Y$ 의 원소에 대응하지 않는  $X$ 의 원소가 존재하므로 함수가 될 수 없고 ④는  $X$ 의 원소 하나가  $Y$ 의 원소 두 개에 대응하는 경우가 생기므로 역시 함수가 될 수 없다.

18. 집합  $X = \{-1, 0, 1, 2\}$ 에 대하여 함수  $f : X \rightarrow X$ 를  $f(x) = |x|$ 라 하자. 이때 함수  $f$ 의 치역의 부분집합의 개수는?

① 2개      ② 4개      ③ 6개      ④ 8개      ⑤ 16개

해설

$f(-1) = f(1) = 1$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f(2) = 2$ 이므로 함수  $f$ 의 치역은  $\{0, 1, 2\}$ 이다.  
원소의 개수가 3인 집합의 부분집합은  $2^3 = 8$ (개)이다.

19.  $X = \{x \mid -1 \leq x \leq 2\}$ ,  $Y = \{y \mid -2 \leq y \leq 2\}$  에서  $f : X \rightarrow Y$ ,  $f(x) = ax + b(a > 0)$  로 정의되는 함수  $f$  가 일대일대응일 때,  $\frac{a}{b}$  의 값은?

- ①  $-2$       ②  $2$       ③  $-\frac{1}{2}$       ④  $\frac{1}{2}$       ⑤  $-1$

해설

일대일 대응이고  $a > 0$  이므로

$$f(-1) = -2 \quad f(2) = 2$$

$$\therefore -a + b = -2, \quad 2a + b = 2$$

$$\Rightarrow a = \frac{4}{3} \quad b = -\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = -2$$

20.  $X = \{x \mid -1 \leq x \leq 2\}$ ,  $Y = \{y \mid 0 \leq y \leq 3\}$  일 때 함수  $f : X \rightarrow Y, y = ax + b (a < 0)$  가 일대일 대응이 되는 상수  $a, b$  의 값의 합은?

①  $-1$

②  $0$

③  $1$

④  $2$

⑤  $3$

해설

$f(x) = ax + b$  는  $a < 0$  이므로 감소함수이다.

$\therefore x = -1$  일 때,  $f(x)$  는 최대이고

$-a + b = 3$

$x = 2$  일 때  $f(x)$  는 최소이며

$2a + b = 0$  두 식을 연립하면  $a = -1, b = 2$

$\therefore a + b = 1$

21. 함수  $y = 2\sqrt{x}$ 의 그래프를  $x$ 축의 양의 방향으로  $a$ 만큼 평행이동한 함수를  $y = f(x)$ 라 하자.  $y = f(x)$ 와 그 역함수의 두 그래프가 서로 접할 때, 상수  $a$ 의 값을 구하여라.

해설

(1) 단계

$y = 2\sqrt{x}$ 의 그래프를  $x$ 축의 방향으로  $a$ 만큼 평행이동한 그래프의 식은  $y = 2\sqrt{x-a}$ 이므로

$$f(x) = 2\sqrt{x-1}$$

(2) 단계

$y = f(x)$ 의 그 역함수를  $y = f^{-1}(x)$ 라고 하면

$y = f(x)$ 와  $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 접할 필요충분조건은

$y = f(x)$ 와 직선  $y = x$ 가 접하는 것이므로

$y = 2\sqrt{x-a}$ 와  $y = x$ 가 접할 조건의  $a$ 의 값을 구한다.

(3) 단계

$x = 2\sqrt{x-a}$ 의 양변을 제곱하면  $x^2 = 4(x-a)$

따라서,  $x^2 - 4x + 4a = 0$ 이 중근을 가질려면

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - 1 \times 4a = 0$$

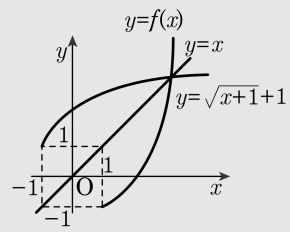
$$\therefore a = 1$$

22. 함수  $f(x) = \sqrt{x+1} + 1$  에 대하여  $y = f(x)$  의 그래프와 이 함수의 역함수의 그래프의 교점의 좌표를  $(a, b)$  라 할 때,  $ab$  의 값을 구하여라.

해설

- (1) 함수  $y = \sqrt{x+1} + 1$  의 그래프와 이 함수의 역함수  $y = f^{-1}(x)$  의 그래프는  $y = x$  에 대하여 대칭이다. 따라서,  $y = f(x)$ ,  $y = f^{-1}(x)$  의 그래프의 교점은  $y = \sqrt{x+1} + 1$  의 그래프와 직선  $y = x$  의 교점과 같다.

즉,  $\sqrt{x+1} + 1 = x$



- (2)  $\sqrt{x+1} + 1 = x$ ,  $\sqrt{x+1} = x - 1$ ,  
 $x + 1 = x^2 - 2x + 1$   
 $x^2 - 3x = 0$ ,  $x(x - 3) = 0$   
 $\therefore x = 0, 3$
- (3) 그런데, 함수  $f^{-1}$  의 정의역이  $x \geq 1$  이므로  $x = 3$   
 $\therefore$  교점  $(a, b) = (3, 3)$   
 $ab = 9$

23. 무리식  $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}-2}$ 의 값이 실수가 되도록  $x$ 의 값의 범위를 정하시오.

해설

(1) 단계

$$x+1 \geq 0, x \geq 0$$

(2) 단계

$$x \neq 4 \text{ 이므로}$$

(3) 단계

$$\therefore 0 \leq x < 4, x > 4$$