1. 함수 $y = \sqrt{x-1}+2$ 의 역함수를 $g(x)$라 할 때 $g(3)$의 값은?

① 3 ② 2 ③ 0

④ $2+\sqrt{2}$ ⑤ 4

해설

$y = \sqrt{x-1}+2$에서

$y-2 = \sqrt{x-1}$ 이 식의 양변을 제곱하면

$y^2-4y+4 = x-1$

$x = y^2-4y+4+1$

따라서 $g(x) = x^2-4x+5\ (x \geq 2)$이므로

$g(3) = 3^2-4\cdot 3+5 = 9-12+5 = 2$

2. 두 곡선 $y=\sqrt{x+1}$, $x=\sqrt{y+1}$ 의 교점의 좌표를 구하면?

① $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{3}, \frac{1+\sqrt{5}}{3}\right)$ ② $\left(\frac{2+\sqrt{5}}{2}, \frac{2+\sqrt{5}}{2}\right)$

③ $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ ④ $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

⑤ $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

해설

두 곡선 $y=\sqrt{x+1}$ 과 $x=\sqrt{y+1}$은
직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로
$y=\sqrt{x+1}$ 과 $y=x$ 의 교점을 구하면 된다.

$\therefore \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

3. 정의역이 $\{x \mid x > 1\}$인 두 함수 $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $g(x) = \sqrt{3(x-1)}$에 대하여 $(f \circ g)^{-1}\left(\dfrac{1}{4}\right)$의 값은?

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

$(f \circ g)^{-1}\left(\dfrac{1}{4}\right) = a$라 하면

$(f \circ g)(a) = \dfrac{1}{4}$이고

$$\begin{aligned} f(g(a)) &= f(\sqrt{3(a-1)}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3(a-1)}+1} \end{aligned}$$
이므로

$$\frac{1}{\sqrt{3(a-1)}+1} = \frac{1}{4}$$

$\sqrt{3(a-1)} + 1 = 4$,

$\sqrt{3(a-1)} = 3$

$3(a-1) = 9,\ a-1 = 3,\ a = 4$

$\therefore (f \circ g)^{-1}\left(\dfrac{1}{4}\right) = 4$

4. 다음 무리식의 값이 실수가 되도록 x의 범위를 정하면?

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{2-x} + \sqrt{x-1}$$

① $-2 \le x \le 1$　② $0 \le x \le 1$　③ $1 < x < 2$

④ $-1 \le x \le 2$　⑤ $1 \le x \le 2$

해설

$x+1 \ge 0 \quad \therefore x \ge -1$

$2-x \ge 0 \quad \therefore x \le 2$

$x-1 \ge 0 \quad \therefore x \ge 1$

공통부분을 구하면 $1 \le x \le 2$

5. 무리식 $\sqrt{2-x}+\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$의 값이 실수가 되도록 x의 범위를 정할 때, 정수 x의 개수는?

① 2개 ② 3개 ③ 4개 ④ 5개 ⑤ 6개

해설

$2-x \geq 0,\ \ x+3>0$

$\therefore -3<x\leq 2$ 이므로 정수의 개수는 5개

6. $\dfrac{x+1}{x(x-1)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x-1}$ 가 x 에 대한 항등식일 때, 상수 a^2+b^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\frac{x+1}{x(x-1)}=\frac{(a+b)x-a}{x(x-1)}$$

따라서, $a+b=1,\quad a=-1$

$\therefore\ a=-1,\quad b=2$

$\therefore a^2+b^2=(-1)^2+2^2=5$

7. $x^2 \neq 4$인 모든 실수 x에 대하여 $\dfrac{x+6}{x^2-4} = \dfrac{a}{x+2} - \dfrac{b}{x-2}$을 만족시키는 상수 a와 b가 있다. 이때, $a+b$의 값은?

① -6 ② -3 ③ -1 ④ 2 ⑤ 4

해설

$\dfrac{x+6}{x^2-4} = \dfrac{a}{x+2} - \dfrac{b}{x-2}$의 우변을 통분하여 계산하면

$$\frac{a}{x+2} - \frac{b}{x-2} = \frac{a(x-2)}{x^2-4} - \frac{b(x+2)}{x^2-4}$$
$$= \frac{(a-b)x - 2(a+b)}{x^2-4}$$

따라서 $a-b=1,\ -2(a+b)=6$

$\therefore\ a=-1,\ b=-2$

$\therefore\ a+b=-1-2=-3$

8. $x^2 \neq 4$인 모든 실수 x에 대하여 $\dfrac{x+6}{x^2-4} = \dfrac{a}{x+2} - \dfrac{b}{x-2}$을 만족시키는 상수 a와 b가 있다. 이때, $a+b$의 값은?

① -6　② -3　③ -1　④ 2　⑤ 4

해설

$\dfrac{x+6}{x^2-4} = \dfrac{a}{x+2} - \dfrac{b}{x-2}$의 우변을 통분하여 계산하면

$$\frac{a}{x+2} - \frac{b}{x-2} = \frac{a(x-2)}{x^2-4} - \frac{b(x+2)}{x^2-4}$$
$$= \frac{(a-b)x - 2(a+b)}{x^2-4}$$

따라서 $a-b=1,\ -2(a+b)=6$이므로 연립하여 풀면

$a=-1,\ b=-2$

$\therefore\ a+b=-3$

9. $\dfrac{x+3}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x+2}$ 을 만족할 때, a^2+b^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\frac{x+3}{(x+1)(x+2)}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x+2}$$
$$=\frac{(a+b)\,x+2a+b}{(x+1)\,(x+2)}$$

$a+b=1, 2a+b=3$

$\therefore\ a=2,\ b=-1$

$\therefore\ a^2+b^2=2^2+(-1)^2=5$

10. 등식 $\dfrac{3x}{x^3+1}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{bx+c}{x^2-x+1}$가 x에 대한 항등식이 되도록 상수 $a,\ b,\ c$의 값을 정할 때, $a+b+c$의 값은?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

$$(\text{우변})=\frac{a(x^2-x+1)+(bx+c)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$=\frac{(a+b)x^2+(-a+b+c)x+a+c}{x^3+1}$$

주어진 등식이 x에 대한 항등식이 되려면

$a+b=0,\ -a+b+c=3,\ a+c=0$

이것을 풀면

$a=-1,\ b=1,\ c=1$

$\therefore\ a+b+c=1$

11. $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3\}$ 일 때, $x \in X$ 인 임의의 x 에 대한 다음의 대응 중에서 함수가 아닌 것은?

① $x \to 1$

② $x \to |x|$

③ $x \to x^2 + 1$

④ $x \to 2x$

⑤ $x \to x^2 + x + 1$

해설

④ $f(-1) = -2$ 이므로 함숫값이 공역에 존재하지 않으므로 함수가 아니다.

12. 두 집합 $X = \{-1,\ 1,\ 2\}$, $Y = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 다음 중 X에서 Y로의 함수인 것을 모두 고르면?

㉠ $f : x \to x$	㉡ $g : x \to x+2$
㉢ $h : x \to \lvert x \rvert$	㉣ $k : x \to x^2 - 1$

① ㉡, ㉢ ② ㉠, ㉡, ㉢ ③ ㉡, ㉢, ㉣

④ ㉠, ㉢, ㉣ ⑤ ㉠, ㉡, ㉣

해설

㉠ $f(x) = x$ 에서 $f(-1) = -1$ 이고 $-1 \notin Y$ 이므로, 함수가 아니다.

㉡ $g(x) = x+2$ 에서 $g(-1) = 1 \in Y$, $g(1) = 3 \in Y$, $g(2) = 4 \in Y$ 이므로 함수이다.

㉢ $h(x) = \lvert x \rvert$ 에서 $h(-1) = 1 \in Y$, $h(1) = 1 \in Y$, $h(2) = 2 \in Y$ 이므로 함수이다.

㉣ $k(x) = x^2 - 1$ 에서 $k(-1) = 0 \notin Y$, $k(1) = 0 \notin Y$, $k(2) = 3 \in Y$ 이므로 함수가 아니다.

13. 두 집합 $X=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $Y=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 다음 중 X에서 Y로의 함수인 것은?

① $f : x \to x$ ② $f : x \to -2|x|$

③ $f : x \to x^2$ ④ $f : x \to x+3$

⑤ $f : x \to |3x|+1$

해설

③ $y=f(x)=x^2$ 에서

$f(-1)=(-1)^2=1 \in Y,\ f(0)=0^2=0 \in Y,\ f(1)=1^2=1 \in Y$

따라서 함수이다.

14. 두 집합 $X = \{-2,\ -1,\ 0\}$, $Y = \{1,\ 2,\ 3\}$ 에 대하여 다음 중 X 에서 Y 로의 함수가 아닌 것은 무엇인가?

① $f(x) = 1 - x$

② $f(x) = |x| + 1$

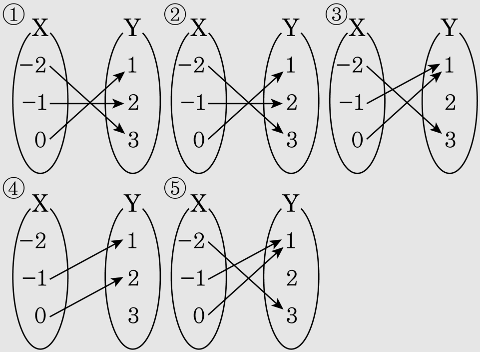
③ $f(x) = x^2 + x + 1$

④ $f(x) = x^3 + 2$

⑤ $f(x) = |x^2 + x| + 1$

해설

각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 함수가 아닌 것은 ④ 이다.

15. 다음 보기 중 $X = \{-1,\ 1,\ 2\}$에서 $Y = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$로의 함수가 될 수 있는 것은 몇 개인가?

<보기>

㉠ $f : x \rightarrow |x|^2$

㉡ $g : x \rightarrow x + 2$

㉢ $h : x \rightarrow |x| + 1$

㉣ $i : x \rightarrow x^2 - 1$

㉤ $j : x \rightarrow |x| + 3$

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

㉠ $f(-1) = |-1|^2 = 1 \in Y$

$f(1) = |1|^2 = 1 \in Y$

$f(2) = |2|^2 = 4 \in Y$

㉡ $g(-1) = -1 + 2 = 1 \in Y$

$g(1) = 1 + 2 = 3 \in Y$

$g(2) = 2 + 2 = 4 \in Y$

㉢ $h(-1) = |-1| + 1 = 2 \in Y$

$h(1) = |1| + 1 = 2 \in Y$

$h(2) = |2| + 1 = 3 \in Y$

㉣ $i(-1) = i(1) = 0 \notin Y$

㉤ $j(2) = 5 \notin Y$

그러므로 ㉣, ㉤은 함수가 될 수 없고 ㉠, ㉡, ㉢ 3개 만 함수가 될 수 있다.

16. $X=\{x\mid -2\le x\le 2\}$, $Y=\{y\mid -3\le y\le 3\}$ 에서 $f\ :\ X\to Y,\ f(x)=ax+b$ (단, $a>0$) 로 정의되는 함수 f 가 일대일 대응이 되도록 $a,\ b$ 의 값을 정하면?

① $a=\dfrac{3}{2},\ b=0$ ② $a=\dfrac{1}{2},\ b=0$ ③ $a=\dfrac{3}{2},\ b=1$
④ $a=\dfrac{5}{2},\ b=0$ ⑤ $a=2,\ b=0$

해설

f 가 일대일 대응이고 $a>0$ 이므로

$$\begin{cases} f(-2)=-2a+b=-3 \\ f(2)=2a+b=3 \end{cases}$$

$\therefore\ a=\dfrac{3}{2},\ b=0$

17. $X=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $Y=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$이라 한다. X의 임의의 원소 x에 대하여 다음과 같은 X에서 Y로의 대응을 생각할 때, 이 중 X에서 Y로의 함수인 것은?

① $x \rightarrow x+3$

② $x \rightarrow x^2-1$

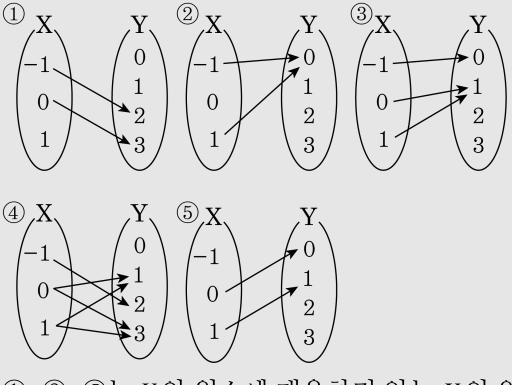
③ $\begin{cases} x \geq 0 \text{ 일 때 } x \rightarrow 1 \\ x < 0 \text{ 일 때 } x \rightarrow 0 \end{cases}$

④ $\begin{cases} x \geq 0 \text{ 일 때 } x \rightarrow \text{홀수} \\ x < 0 \text{ 일 때 } x \rightarrow 2 \end{cases}$

⑤ $x \rightarrow x^3$

해설

X에서 Y로의 함수가 되려면 X의 원소가 빠짐없이 Y의 원소 하나에 대응해야 한다.
순서대로 대응도를 만들어 보면 다음과 같다.



①, ②, ⑤는 Y의 원소에 대응하지 않는 X의 원소가 존재하므로 함수가 될 수 없고 ④는 X의 원소 하나가 Y의 원소 두 개에 대응하는 경우가 생기므로 역시 함수가 될 수 없다.

18. 집합 $X = \{-1, 0, 1, 2\}$에 대하여 함수 $f : X \to X$를 $f(x) = |x|$라 하자. 이때 함수 f의 치역의 부분집합의 개수는?

① 2개　② 4개　③ 6개　④ 8개　⑤ 16개

해설

$f(-1) = f(1) = 1,\ f(0) = 0,\ f(2) = 2$이므로 함수 f의 치역은 $\{0, 1, 2\}$이다.
원소의 개수가 3인 집합의 부분집합은 $2^3 = 8$(개)이다.

19. $X=\{x\mid -1\le x\le 2\}$, $Y=\{y\mid -2\le y\le 2\}$ 에서 $f:X\to Y$, $f(x)=ax+b(a>0)$ 로 정의되는 함수 f 가 일대일대응일 때, $\frac{a}{b}$ 의 값은?

① -2 ② 2 ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ -1

해설

일대일 대응이고 $a>0$ 이므로

$f(-1)=-2\quad f(2)=2$

$\therefore\ -a+b=-2,\quad 2a+b=2$

$\Rightarrow\ a=\frac{4}{3}\quad b=-\frac{2}{3}$

$\Rightarrow\ \frac{a}{b}=-2$

20. $X = \{x \mid -1 \le x \le 2\}$, $Y = \{y \mid 0 \le y \le 3\}$ 일 때 함수$f : X \to Y, y = ax + b(a < 0)$ 가 일대일 대응이 되는상수 a, b 의 값의 합은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$f(x) = ax + b$ 는 $a < 0$ 이므로 감소함수이다.
$\therefore\ x = -1$ 일 때, $f(x)$ 는 최대이고
$-a + b = 3$
$x = 2$ 일 때 $f(x)$ 는 최소이며
$2a + b = 0$ 두 식을 연립하면 $a = -1, b = 2$
$\therefore\ a + b = 1$

21. 함수 $y=2\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 양의 방향으로 a만큼 평행이동한 함수를 $y=f(x)$라 하자. $y=f(x)$와 그 역함수의 두 그래프가 서로 접할 때, 상수 a의 값을 구하여라.

해설

(1) 단계

$y=2\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=2\sqrt{x-a}$이므로

$f(x)=2\sqrt{x-1}$

(2) 단계

$y=f(x)$의 그 역함수를 $y=f^{-1}(x)$라고 하면

$y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 접할 필요충분조건은

$y=f(x)$와 직선 $y=x$가 접하는 것이므로

$y=2\sqrt{x-a}$와 $y=x$가 접할 조건의 a의 값을 구한다.

(3) 단계

$x=2\sqrt{x-a}$의 양변을 제곱하면 $x^2=4(x-a)$

따라서, $x^2-4x+4a=0$이 중근을 가질려면

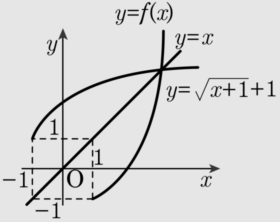
$$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\times 4a=0$$

$\therefore\ a=1$

22. 함수 $f(x)=\sqrt{x+1}+1$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프와 이 함수의 역함수의 그래프의 교점의 좌표를 (a,b)라 할 때, ab의 값을 구하여라.

해설

(1) 함수 $y=\sqrt{x+1}+1$ 의 그래프와
이 함수의 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는
$y=x$에 대하여 대칭이다.
따라서, $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프의
교점은 $y=\sqrt{x+1}+1$의 그래프와
직선 $y=x$의 교점과 같다.
즉, $\sqrt{x+1}+1=x$



(2) $\sqrt{x+1}+1=x$, $\sqrt{x+1}=x-1$,
$x+1=x^2-2x+1$
$x^2-3x=0$, $x(x-3)=0$
$\therefore\ x=0,\ 3$

(3) 그런데, 함수 f^{-1}의 정의역이 $x\geq 1$이므로 $x=3$
$\therefore$ 교점 $(a,b)=(3,3)$
$ab=9$

23. 무리식 $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}-2}$ 의 값이 실수가 되도록 x 의 값의 범위를 정하시오.

해설

(1) 단계

$x+1 \geq 0,\ x \geq 0$

(2) 단계

$x \neq 4$ 이므로

(3) 단계

$\therefore 0 \leq x < 4,\ \ x > 4$