1. $x \neq 3,\ x \neq 5$인 모든 실수 x에 대하여 $\dfrac{3x-19}{x^2-8x+15} = \dfrac{a}{x-3} - \dfrac{b}{x-5}$가 항상 성립하도록 상수 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값은?

① -2 ② 3 ③ 7 ④ 10 ⑤ 15

해설

우변을 정리하여 좌변의 계수와 비교한다.

$$\frac{a}{x-3} - \frac{b}{x-5} = \frac{a(x-5)-b(x-3)}{(x-3)(x-5)}$$

$$= \frac{a(x-5)-b(x-3)}{x^2-8x+15}$$

$$3x-19 = (a-b)x + (-5a+3b)$$

$$\begin{cases} a-b=3 \\ 5a-3b=19 \end{cases} \Rightarrow a=5, b=2$$

$\therefore\ a+b=7$

2. 두 양수 m, n에 대하여 $\dfrac{ma+nb}{m+n} = \dfrac{mb+nc}{m+n} = \dfrac{mc+na}{m+n} = 10$이 성립할 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 30

해설

$$\frac{ma+nb}{m+n} = \frac{mb+nc}{m+n} = \frac{mc+na}{m+n}$$

$$= \frac{(ma+nb)+(mb+nc)+(mc+na)}{(m+n)+(m+n)+(m+n)}$$

$$= \frac{m(a+b+c)+n(a+b+c)}{3(m+n)}$$

$$= \frac{(m+n)(a+b+c)}{3(m+n)} = \frac{a+b+c}{3}$$

따라서, $\dfrac{a+b+c}{3} = 10$이므로

$a+b+c = 30$

3. 함수 $f(x) = ax + b (a > 0)$ 에 대하여 합성함수 $(f \circ f)(x) = 4x + 3$ 일 때 $f(1)$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = a(ax + b) + b$

$= a^2x + ab + b$

$a^2x + ab + b = 4x + 3$

x 에 대한 항등식 이므로 $a^2 = 4, ab + b = 3$

$a > 0$ 이므로 $a = 2, b = 1$

$\therefore\ f(x) = 2x + 1$

$\therefore\ f(1) = 3$

4. $\dfrac{x+1}{x(x-1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1}$ 가 x 에 대한 항등식일 때, 상수 a^2+b^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{(a+b)x-a}{x(x-1)}$$

따라서, $a+b=1$, $a=-1$

$\therefore\ a=-1,\ b=2$

$\therefore a^2+b^2=(-1)^2+2^2=5$

5. 정의역이 $\{0,\ 1\}$인 두 함수 $f(x)=x^2+ax+b,\ g(x)=2x+1$에 대하여 $f=g$일 때, $a-b$의 값은? (단, $a,\ b$는 상수)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

두 함수 $f,\ g$가 서로 같으므로
정의역의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)=g(x)$이다.
즉, $f(0)=g(0),\ f(1)=g(1)$이므로
$f(0)=b,\ g(0)=1$에서 $b=1$
$f(1)=1+a+b,\ g(1)=3$에서 $a+b=2$
$\therefore a=1$
$\therefore a-b=0$

6. 두 집합 $X=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $Y=\{y|y$는 정수$\}$에 대하여 두 함수 $f,\ g$를 X에서 Y로의 함수로 정의한다. $f(x)=x-1,\ g(x)=ax^2+bx+c$라 할 때, $f=g$가 되도록 하는 상수 $a,\ b,\ c$의 곱 abc를 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f=g$에서
$f(-1)=g(-1),\ f(0)=g(0),\ f(1)=g(1)$이므로
$f(-1)=g(-1)$에서 $-2=a-b+c\cdots$㉠
$f(0)=g(0)$ 에서 $-1=c\cdots$㉡
$f(1)=g(1)$ 에서 $0=a+b+c\cdots$㉢
㉠, ㉡, ㉢에서$a=0,\ b=1,\ c=-1$
$\therefore abc=0$

7. 다음 보기 중 $X = \{-1, 1, 2\}$에서 $Y = \{1, 2, 3, 4\}$로의 함수가 될 수 있는 것은 몇 개인가?

<보기>

㉠ $f : x \to |x|^2$ ㉡ $g : x \to x + 2$

㉢ $h : x \to |x| + 1$ ㉣ $i : x \to x^2 - 1$

㉤ $j : x \to |x| + 3$

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

㉠ $f(-1) = |-1|^2 = 1 \in Y$
$f(1) = |1|^2 = 1 \in Y$
$f(2) = |2|^2 = 4 \in Y$
㉡ $g(-1) = -1 + 2 = 1 \in Y$
$g(1) = 1 + 2 = 3 \in Y$
$g(2) = 2 + 2 = 4 \in Y$
㉢ $h(-1) = |-1| + 1 = 2 \in Y$
$h(1) = |1| + 1 = 2 \in Y$
$h(2) = |2| + 1 = 3 \in Y$
㉣ $i(-1) = i(1) = 0 \notin Y$
㉤ $j(2) = 5 \notin Y$
그러므로 ㉣, ㉤은 함수가 될 수 없고 ㉠, ㉡, ㉢ 3개 만 함수가 될 수 있다.

8. $X = \{x \mid x \geq a \text{ 인 실수 }\}$이고, $f(x) = x^2 - 6x$ 로 정의되는 함수 $f : X \to X$ 가 일대일대응이 될 때, 상수 a 의 값을 하면?

① 3 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 10

해설

$X = \{x \mid x \geq a \text{ 인 실수 }\}$이므로
일대일 대응이 되려면
$x^2 - 6x \geq x$ 가 되어야 한다.
부등식을 풀면
$x \leq 0$ 또는 $x \geq 7$
$x \geq a$ 이므로 $x \geq 7$ 을 만족하는 x 의 최솟값이 a 가 된다.
$\therefore\ a = 7$

9. $X=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $Y=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$일 때, 다음 보기에서 X에서 Y로의 함수는 모두 몇 개인가?

보기

㉠ $x \to x+2$

㉡ $x \to |x|$

㉢ $x \to \sqrt{x^2}$

㉣ $x \to x^3$

㉤ $x \to (x^2$을 2로 나눈 나머지)

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

주어진 식에 $X=\{-1,\ 0,\ 1\}$의 원소를 x대신 대입해서 얻는 값의 집합을 $f(X)$라 할 때, $f(X) \subset Y$이어야 함수가 된다.

㉠ $f(x)=x+2$ 이므로 $f(X)=\{1,2,3\} \subset Y$

$\therefore$ 함수이다.

㉡ $f(x)=|x|$ 이므로 $f(X)=\{0,\ 1\} \subset Y$

$\therefore$ 함수이다.

㉢ $f(x)=\sqrt{x^2}$ 이므로 $f(X)=\{0,\ 1\} \subset Y$

$\therefore$ 함수이다.

㉣ $f(x)=x^3$ 이므로 $f(X)=\{-1,0,1\} \not\subset Y$

$\therefore$ 함수가 아니다.

㉤ $f(x)=(x^2$을 2로 나눈나머지) 이므로

$\therefore$ 함수이다.

$\therefore$ 함수의 개수는 ㉠, ㉡, ㉢, ㉤ 4개이다.

10. $\sqrt{11-\sqrt{72}}$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라 할 때, $\sqrt{(b-a)^2}$의 값은?

① 1 ② $1-\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{2}-1$

④ $\sqrt{2}$ ⑤ $-\sqrt{2}$

해설

$$\sqrt{11-\sqrt{72}} = \sqrt{11-2\sqrt{18}}$$
$$= \sqrt{(\sqrt{9}-\sqrt{2})^2} = 3-\sqrt{2}$$

$3-\sqrt{2} = 1.\times\times\times\times$

정수 부분 a : 1 소수부분 b : $2-\sqrt{2}$

$$\therefore \sqrt{(b-a)^2} = \sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$$
$$= \sqrt{2}-1 \ (1-\sqrt{2}<0)$$

11. 무리수 $\sqrt{3-\sqrt{8}}$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라고 할 때, $n < a-b < n+1$을 만족하는 n의 값을 구하여라. (단, n은 정수)

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$

정수 부분(a) : 0, 소수 부분(b) : $\sqrt{2}-1$

$n < 0-\sqrt{2}+1 < n+1$

$n-1 < -\sqrt{2} < n$

$n-1 < -1.414\cdots < n$

$\therefore\ n = -1$

12. $x = \sqrt{6 - \sqrt{20}}$에 대하여 x의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라 할 때, $x + a - \frac{1}{b}$의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$x = \sqrt{6 - \sqrt{20}} = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$$
$$= \sqrt{5} - 1 = 1.\times\times\times$$
정수 부분 $a = 1$, 소수 부분 $b = x - a = \sqrt{5} - 2$
$$x + a - \frac{1}{b} = \sqrt{5} - 1 + 1 - \frac{1}{\sqrt{5} - 2}$$
$$= \sqrt{5} - (\sqrt{5} + 2) = -2$$

13. 무리수 $\sqrt{k}$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라 할 때, $a^3 + b^3 = 9ab$을 만족하는 양의 정수 k를 구하면?

① 6 ② 4 ③ 2 ④ 1 ⑤ 11

해설

$\sqrt{k} = a + b \quad \therefore \ b = \sqrt{k} - a$

$a^3 + b^3 = 9ab, \quad a^3 + (\sqrt{k} - a)^3 = 9a(\sqrt{k} - a)$

$\therefore \ 3a(3a - k) + \sqrt{k}(3a^2 - 9a + k) = 0$

a, k가 정수이므로

$3a(3a - k) = 0, \quad 3a^2 - 9a + k = 0$

연립하여 풀면

$\therefore a = 2, \ \ k = 6$

14. $\sqrt{11-6\sqrt{2}}$의 소수 부분 x에 대하여 $y=x+\frac{1}{x}$일 때, $\sqrt{x(y-2)}$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $\sqrt{2}-1$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{11-6\sqrt{2}} &= \sqrt{11-2\sqrt{18}} \\ &= \sqrt{(\sqrt{9}-\sqrt{2})^2} \\ &= 3-\sqrt{2}3-\sqrt{2} \\ &= 1.\cdots \Rightarrow \text{소수부분 } x : 2-\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$y=x+\frac{1}{x}=2-\sqrt{2}+\frac{1}{2-\sqrt{2}}$$

$$=2-\sqrt{2}+\frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

$$=3-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

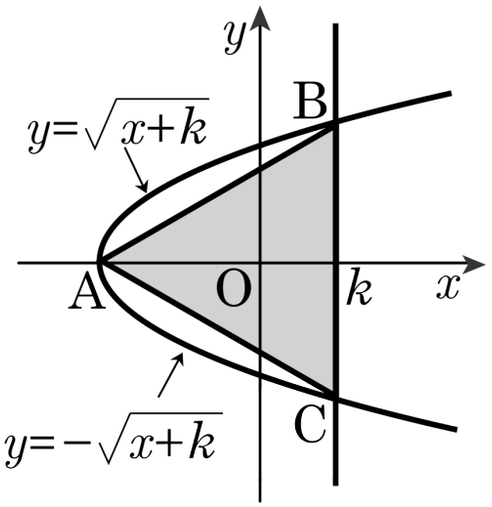
$$y-2=1-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

$$\sqrt{x(y-2)}=\sqrt{(2-\sqrt{2})\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$$=\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$$

$$=\sqrt{2}-1$$

15. 다음 그림과 같이 두 함수 $y = \sqrt{x+k}$, $y = -\sqrt{x+k}$의 그래프의 교점을 A, 두 그래프와 직선 $x = k$의 교점을 각각 점B, C라고 할 때, $\triangle ABC$의 넓이가 64이다. 이 때, 실수 k의 값은?



① 6 ② 7 ③ 8

④ 9 ⑤ 10

해설

점 A의 좌표는 $(-k,\ 0)$이고,

$y = \sqrt{x+k}$에서 $x = k$일 때, $y = \sqrt{2k}$

$y = -\sqrt{x+k}$에서 $x = k$일 때, $y = -\sqrt{2k}$

이므로 두 점 B, C의 좌표는 각각

B $(k,\ \sqrt{2k})$, C $(k,\ -\sqrt{2k})$이다.

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2k} \cdot 2k = 64\ ,\ k\sqrt{2k} = 32$$

양변을 제곱하면 $2k^3 = 32^2,\ k^3 = 512$

이 때, k는 실수이므로

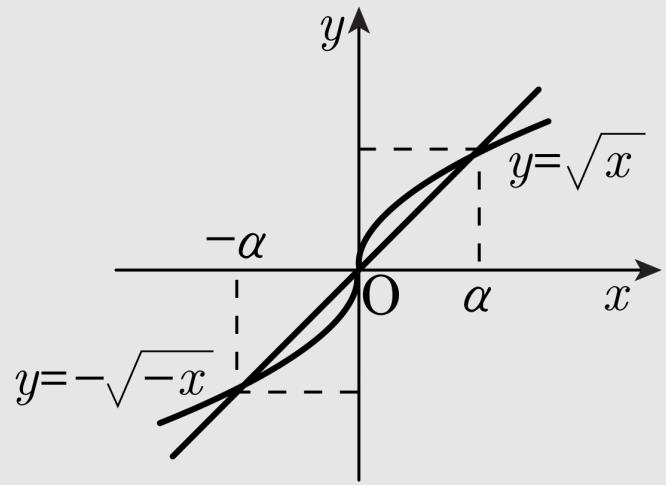
$\therefore k = 8$

16. 원점을 지나는 직선이 두 함수 $y=\sqrt{x}$, $y=-\sqrt{-x}$의 그래프와 서로 다른 세 점에서 만날 때, 세 점의 x좌표의 값의 합을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

두 함수 $y=\sqrt{x}$, $y=-\sqrt{-x}$ 의 그래프는
원점에 대하여 대칭이므로
다음 그림과 같이 원점을 지나는 직선과 서로 다른 세 점에서 만날 때, 세 점의 x 좌표의 값의 합은 항상 0 이다.



17. 곡선 $y = \sqrt{4x-8}$과 직선 $y = x + k$가 한 점에서 만나기 위한 k 의 값의 범위는?

① $k = -2$ 또는 $k > 1$

② $k = -1$ 또는 $k < -2$

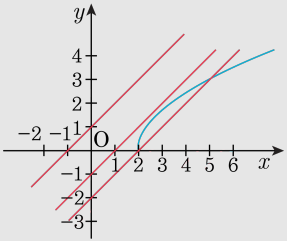
③ $k = 1$ 또는 $k > 2$

④ $k = 2$ 또는 $k < -1$

⑤ $k = -1$

해설

그래프에서 보듯이 한 점에서 만나는 경우는
접하는 경우이거나 $k < -2$ 인 경우이다.



접하는 경우는 $\sqrt{4x-8} = x + k$에서

$4x - 8 = x^2 + 2kx + k^2$

$x^2 + 2(k-2)x + k^2 + 8 = 0$

$\frac{D}{4} = (k-2)^2 - (k^2+8) = -4k - 4 = 0$에서 $k = -1$

따라서 $k = -1$ 또는 $k < -2$

18. 두 함수 $y=\sqrt{x+1}+2, y=mx$ 의 그래프가 서로 만나지 않도록 하는 실수 m 의 값의 범위는 $a<m\le b$ 이다. 이 때 $a+b$ 의 값은?

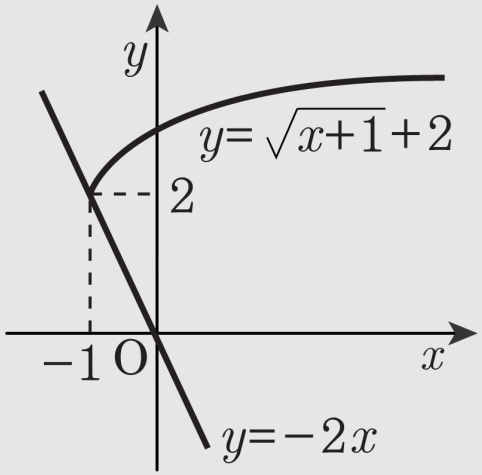
① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

해설

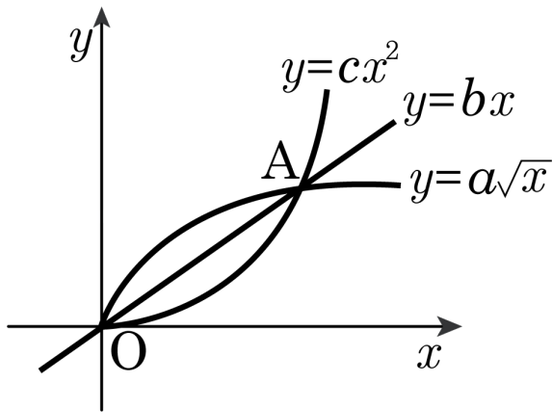
다음 그림에서 두 함수의 그래프가 만나지 않으려면
m 의 값의 범위는 $-2<m\le 0$ 이어야 한다.

$\therefore a=-2, b=0$

$\therefore a+b=-2$



19. 양의 상수 $a,\ b,\ c$ 에 대하여 세 함수 $y = a\sqrt{x},\ y = bx,\ y = cx^2$ 의 그래프가 그림과 같이 원점 O와 다른 점 A에서 동시에 만날 때, a, b, c 의 관계로 옳은 것은?



① $a^3 = b^2c$ ② $a^3 = bc^2$ ③ $b^3 = a^2c$

④ $b^3 = ac^2$ ⑤ $c^3 = a^2b$

해설

곡선 $y = cx^2$ 과 $y = bx$ 의 교점의 x 좌표 (단, $x \neq 0$)는 $cx^2 = bx$

$\therefore\ x = \dfrac{b}{c}$

곡선 $y = a\sqrt{x}$ 와 $y = bx$ 의 교점의 x 좌표 (단, $x \neq 0$)는

$a\sqrt{x} = bx \therefore\ x = \dfrac{a^2}{b^2}$

두 점이 일치하므로 $\dfrac{b}{c} = \dfrac{a^2}{b^2}$

$\therefore\ b^3 = a^2c$

20. 함수 $y = \dfrac{k}{x-1} + 3$ $(k \neq 0)$ 의 그래프에 대한 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $k > 0$ 이면 제 1 사분면과 제 3 사분면을 지난다.

㉡ $k < 0$ 이면 제 1, 2, 4 사분면을 지난다.

㉢ $k > 3$ 이면 모든 사분면을 지난다.

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

점근선은 $x = 1, y = 3$ 이다.

㉠, ㉢ : $0 < k \leq 3$ 이면, 제 $1, 2, 4$ 사분면을 지난다.

$k > 3$ 이면 모든 사분면을 지난다.

㉡ : $k < 0$ 이면, 제 $1, 2, 4$ 사분면을 지난다.

$\therefore$ ㉡, ㉢ 이 참.

21. 두 함수 $y=\dfrac{5x+1}{3x-2}$, $y=\dfrac{ax+3}{2x+b}$ 의 그래프의 점근선이 일치할 때, $a+b$ 의 값은?

① $\dfrac{4}{3}$ ② $\dfrac{5}{3}$ ③ 2 ④ 3 ⑤ $\dfrac{7}{2}$

해설

$y=\dfrac{5x+1}{3x-2}$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=\dfrac{2}{3}$, $y=\dfrac{5}{3}$ 이고,

$y=\dfrac{ax+3}{2x+b}$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-\dfrac{b}{2}$, $y=\dfrac{a}{2}$ 이다.

이 때, 두 그래프의 점근선이 일치하므로

$\dfrac{2}{3}=-\dfrac{b}{2}$, $\dfrac{5}{3}=\dfrac{a}{2}$

$\therefore\ a=\dfrac{10}{3}$, $b=-\dfrac{4}{3}$

$\therefore\ a+b=2$

22. 함수 $y=\dfrac{ax+1}{-x+b}$ 의 그래프의 점근선이 $x=2, y=-1$ 일 때, 상수 $a+b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$y=\dfrac{ax+1}{-(x-b)}$ 의 점근선이 $x=2, y=-1$ 이므로

$b=2$ 이고

$y=\dfrac{a(x-2)+2a+1}{-(x-2)}=\dfrac{2a+1}{-(x-2)}-a$ 에서

$-a=-1$ 이므로

$\therefore a+b=1+2=3$

23. 분수함수 $f(x) = \dfrac{ax+5}{bx+c}$ 의 그래프는 점 $(1,1)$ 을 지나고 점근선의 방정식이 $x = \dfrac{1}{2}, y = -\dfrac{1}{3}$ 이다. $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때 $g(0)$ 은?

① $-\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{5}{2}$ ③ 3 ④ 4 ⑤ $\dfrac{22}{5}$

해설

$y = \dfrac{ax+5}{bx+c}$ 에서

점근선 $x = -\dfrac{c}{b} = \dfrac{1}{2}$, $y = \dfrac{a}{b} = -\dfrac{1}{3}$

$(1,\ 1)$ 을 지나므로

$1 = \dfrac{a+5}{b+c}$

$2c = -b,\ 3a = -b,\ c = -3$

$\therefore y = \dfrac{-2x+5}{6x-3}$

$y^{-1} = \dfrac{3x+5}{6x+2}$

$g(x) = \dfrac{3x+5}{6x+2}$

$\therefore\ g(0) = \dfrac{5}{2}$

24. 함수 $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ 의 그래프에서 점근선의 방정식을 $x=a,\ y=b$라 할 때, 함수 $y=\sqrt{ax+b}$의 역함수의 최솟값을 구하면?

① -1 ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ $\dfrac{3}{2}$

해설

$y=\dfrac{x+1}{x-2}=1+\dfrac{3}{x-2}$

$\therefore$ 점근선은 $x=2,\ y=1$

$\therefore\ a=2,\ b=1$

$y=\sqrt{2x+1}$의 $\left(x\geq -\dfrac{1}{2}\right)$ 역함수는

$y=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}\ \ (x\geq 0)$

$\therefore$ 최솟값은 $-\dfrac{1}{2}$

25. 다음 등식이 $x \neq 0,\ x \neq -1$ 인 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하도록 상수 $a,\ b,\ c$의 값을 정하여라.

$$\frac{2x+1}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$$

해설

(1) 단계

준식의 우변을 통분하면

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{a(x+1)^2 + bx(x+1) + cx}{x(x+1)^2}$$

$$= \frac{(a+b)x^2 + (2a+b+c)x + a}{x(x+1)^2}$$

(2) 단계

따라서

$$\frac{2x+1}{x(x+1)^2}$$

$$= \frac{(a+b)x^2 + (2a+b+c)x + a}{x(x+1)^2}$$ 가

$x \neq 0,\ x \neq -1$ 인 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하므로

양변의 분자가 반드시 같아야 한다.

즉, $2x+1 = (a+b)x^2 + (2a+b+c)x + a$

양변의 계수를 비교하면

$a+b=0,\ 2a+b+c=2,\ a=1$

(3) 단계

$\therefore\ a=1,\ b=-1,\ c=1$