

1. 함수 $f : x \rightarrow ax + b$ 이고 $f(0) = -3$, $\{f(1) + 1\}^2 = 4$ 일 때 $a + b$ 의 값은? (단 $a \neq 0$)

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$f(x) = ax + b \text{ 에서 } f(0) = b = -3$$

$$f(1) = a + b = a - 3, \{f(1) + 1\}^2 = (a - 3 + 1)^2 = 4$$

$$(a - 2)^2 = 4$$

$$\therefore a = 0 \text{ 또는 } 4$$

$$\therefore a \neq 0 \text{ 이므로 } a = 4$$

$$\therefore a + b = 4 + (-3) = 1$$

2. 두 집합 $X = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 집합 X 에서 Y 로의 함수 f 를 다음과 같이 정의할 때, 이 함수의 치역을 구하면?

$$f(x) = \begin{cases} |x| - 1 & (x < 0) \\ x & (x = 0) \\ \frac{x^2}{4} & (x > 0) \end{cases}$$

- ① $\{0, 1, 2\}$ ② $\{0, 1, 3\}$ ③ $\{0, 1, 2, 3\}$
④ $\{0, 1, 2, 4\}$ ⑤ $\{0, 1, 3, 4\}$

해설

$$\begin{aligned} f(-4) &= |-4| - 1 = 3 \\ f(-2) &= |-2| - 1 = 1 \\ f(0) &= 0 \\ f(2) &= \frac{4}{4} = 1 \\ f(4) &= \frac{16}{4} = 4 \\ \therefore \text{치역} &: \{0, 1, 3, 4\} \end{aligned}$$

3. $f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 3x + 2$ 일 때, $f(2)$ 의 값을 구하면?

① 2

② 3

③ 8

④ 11

⑤ 12

해설

$$\frac{x+1}{2} = 2 \text{ 에서 } x = 3$$

$$\therefore f(2) = 11$$

4. 양의 정수 전체의 집합 X 에서 Y 로의 함수 f 를 다음과 같이 정의한다.
 $f(x) = (x \text{의 약수의 개수})$ 이 때, 다음 중 $f(x) = 4$ 인 x 가 될 수 있는
것을 고르면?

① 5 ② 9 ③ 12 ④ 15 ⑤ 24

해설

5의 약수 : 1, 5 $\Rightarrow f(5) = 2$
9의 약수 : 1, 3, 9 $\Rightarrow f(9) = 3$
12의 약수 : 1, 2, 3, 4, 6, 12 $\Rightarrow f(12) = 6$
15의 약수 : 1, 3, 5, 15 $\Rightarrow f(15) = 4$
24의 약수 : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 $\Rightarrow f(24) = 8$
따라서 보기 중 $f(x) = 4$ 인 것은 15

5. 실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} 2-x & (x \text{는 유리수}) \\ x & (x \text{는 무리수}) \end{cases} \quad \text{로 정의될 때, } f(x) + f(2-x) \text{ 의 값}$$

은?

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$$\text{함수 } f(x) = \begin{cases} 2-x & (x \text{는 유리수}) \\ x & (x \text{는 무리수}) \end{cases} \quad \text{에서}$$

(i) x 가 유리수일 때, $2-x$ 도 유리수이므로

$$f(x) + f(2-x) = (2-x) + \{2 - (2-x)\} = 2$$

(ii) x 가 무리수일 때, $2-x$ 도 무리수이므로

$$f(x) + f(2-x) = x + (2-x) = 2$$

(i), (ii)에서 $f(x) + f(2-x) = 2$

6. 다음 보기 중 $X = \{-1, 1, 2\}$ 에서 $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ 로의 함수가 될 수 있는 것은 몇 개인가?

<보기>

㉠ $f : x \rightarrow |x|^2$

㉡ $g : x \rightarrow x + 2$

㉢ $h : x \rightarrow |x| + 1$

㉣ $i : x \rightarrow x^2 - 1$

㉤ $j : x \rightarrow |x| + 3$

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

㉠ $f(-1) = |-1|^2 = 1 \in Y$

$f(1) = |1|^2 = 1 \in Y$

$f(2) = |2|^2 = 4 \in Y$

㉡ $g(-1) = -1 + 2 = 1 \in Y$

$g(1) = 1 + 2 = 3 \in Y$

$g(2) = 2 + 2 = 4 \in Y$

㉢ $h(-1) = |-1| + 1 = 2 \in Y$

$h(1) = |1| + 1 = 2 \in Y$

$h(2) = |2| + 1 = 3 \in Y$

㉣ $i(-1) = i(1) = 0 \notin Y$

㉤ $j(2) = 5 \notin Y$

그러므로 ㉠, ㉡은 함수가 될 수 없고 ㉠, ㉡, ㉢ 3개 만 함수가 될 수 있다.

7. 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 다음 보기 중 함수 $f: X \rightarrow X$ 로 가능한 것의 개수는 몇 개인가?

보기

- ㉠ $f(x) = -x$
- ㉡ $f(x) = x^2$
- ㉢ $f(x) = |x|$
- ㉤ $f(x) = \frac{1}{x}$
- ㉥ $f(x) = \sqrt{x}$

- ① 1 개
- ② 2 개
- ③ 3 개
- ④ 4 개
- ⑤ 5 개

해설

㉠ $f(x) = -x$ 에서 $f(-1) = 1 \in X$, $f(0) = 0 \in X$, $f(1) = -1 \in X$ 따라서 함수이다.

㉡ $f(x) = x^2$ 에서 $f(-1) = 1 \in X$, $f(0) = 0 \in X$, $f(1) = 1 \in X$ 따라서 함수이다.

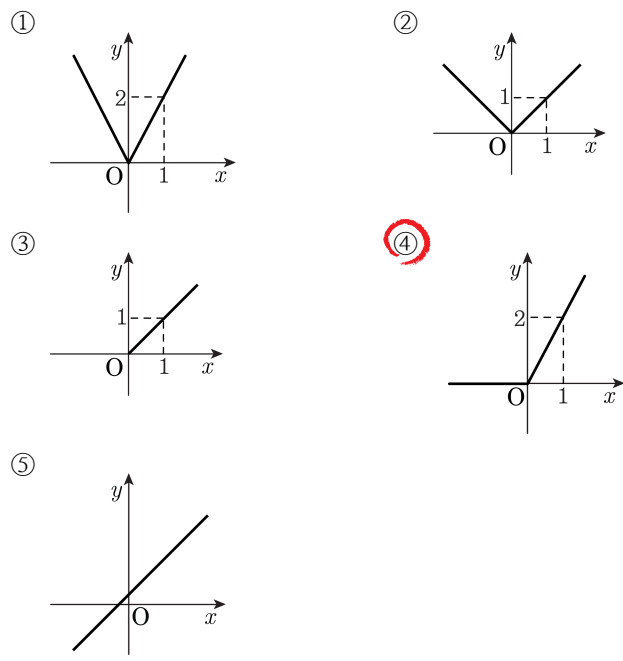
㉢ $f(x) = |x|$ 에서 $f(-1) = 1 \in X$, $f(0) = 0 \in X$, $f(1) = 1 \in X$ 따라서 함수이다.

㉤ $f(x) = \frac{1}{x}$ 에서 $f(0)$ 이 정의되지 않으므로 함수가 아니다.

㉥ $f(x) = \sqrt{x}$ 에서 $f(-1) = i \notin X$ 이므로 함수가 아니다.

따라서 함수로 가능한 것은 ㉠, ㉡, ㉢의 3개다.

8. 다음 중 함수 $y = x + |x|$ 의 그래프는?



해설

$y = x + |x|$ 에서
 $x \leq 0$ 일 때 $y = x - x = 0$ 이고
 $x > 0$ 일 때 $y = x + x = 2x$ 이다.
따라서 주어진 함수의 그래프는 ④와 같다.

9. $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3\}$ 일 때, $x \in X$ 인 임의의 x 에 대한 다음의 대응 중에서 함수가 아닌 것은?

① $x \rightarrow 1$

② $x \rightarrow |x|$

③ $x \rightarrow x^2 + 1$

④ $x \rightarrow 2x$

⑤ $x \rightarrow x^2 + x + 1$

해설

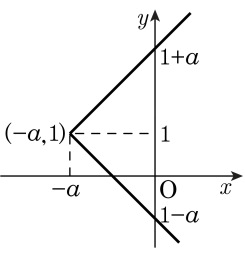
④ $f(-1) = -2$ 이므로 함숫값이 공역에 존재하지 않으므로 함수가 아니다.

10. $|y-1|=x+a$ 의 그래프와 y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 4 일 때, 양수 a 의 값은?

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

해설

$|y-1|=x+a$ 의
그래프는 $|y|=x$ 를
 x 축 음의 방향으로 a ,
 y 축 양의 방향으로 1 만큼 평행이동시킨
그래프이므로 다음 그림과 같다.
이때, y 절편은 $|y-1|=a$ 에서 $y=1\pm a$
 $\therefore S=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot a=4 \quad \therefore a=2(a>0)$



11. 정의역이 $\{x \mid x > 1\}$ 인 두 함수 $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $g(x) = \sqrt{3(x-1)}$ 에 대하여 $(f \circ g)^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$ 의 값은?

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$$(f \circ g)^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = a \text{라 하면}$$
$$(f \circ g)(a) = \frac{1}{4} \text{이고}$$
$$f(g(a)) = f(\sqrt{3(a-1)})$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3(a-1)}+1} \text{이므로}$$
$$\frac{1}{\sqrt{3(a-1)}+1} = \frac{1}{4}$$
$$\sqrt{3(a-1)}+1 = 4,$$
$$\sqrt{3(a-1)} = 3$$
$$3(a-1) = 9, a-1 = 3, a = 4$$
$$\therefore (f \circ g)^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = 4$$

12. 무리함수 $y = -\sqrt{1-x} + 2$ 의 역함수는?

① $y = (x-2)^2 + 1 (x \leq 2)$

② $y = (x-2)^2 - 1 (x \leq 2)$

③ $y = -(x-2)^2 + 1 (x \leq 2)$

④ $y = -(x-2)^2 - 1 (x \leq 2)$

⑤ $y = -(x+2)^2 + 1 (x \leq 2)$

해설

$$y = -\sqrt{1-x} + 2 \text{ 에서 } 1-x \geq 0 \text{ 이므로 } x \leq 1$$

$$y-2 = -\sqrt{1-x} \leq 0 \text{ 이므로 } y \leq 2$$

$$1-x = (y-2)^2, \quad x = -(y-2)^2 + 1$$

x, y 를 바꾸면 구하는 역함수는

$$\therefore y = -(x-2)^2 + 1 (x \leq 2)$$

13. $y = \sqrt{2x+1}$ 의 역함수를 $y = g(x)$ 라 하면, $g(-3)$ 의 값은?

- ① 4 ② $\sqrt{-5}$ ③ -5 ④ 없다 ⑤ -3

해설

역함수가 존재하려면 일대일 대응이 되어야 한다.

$y = \sqrt{2x+1}$ 의 역함수 $y = g(x)$ 의 정의역은

$y = \sqrt{2x+1}$ 의 치역이 되어야 하는데

이 함수의 치역은 음수가 될 수 없으므로

$g(-3)$ 의 값은 존재하지 않는다.

14. 함수 $y = \sqrt{x-1} + 2$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때 $g(3)$ 의 값은?

① 3

② 2

③ 0

④ $2 + \sqrt{2}$

⑤ 4

해설

$y = \sqrt{x-1} + 2$ 에서

$y - 2 = \sqrt{x-1}$ 이 식의 양변을 제곱하면

$y^2 - 4y + 4 = x - 1$

$x = y^2 - 4y + 4 + 1$

따라서 $g(x) = x^2 - 4x + 5$ ($x \geq 2$) 이므로

$g(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 5 = 9 - 12 + 5 = 2$

15. 함수 $y = \frac{x+1}{x-2}$ 의 그래프에서 점근선의 방정식을 $x = a$, $y = b$ 라 할 때, 함수 $y = \sqrt{ax+b}$ 의 역함수의 최솟값을 구하면?

- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$$y = \frac{x+1}{x-2} = 1 + \frac{3}{x-2}$$

$$\therefore \text{점근선은 } x = 2, y = 1$$

$$\therefore a = 2, b = 1$$

$$y = \sqrt{2x+1} \text{ 의 } \left(x \geq -\frac{1}{2}\right) \text{ 역함수는}$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \quad (x \geq 0)$$

$$\therefore \text{최솟값은 } -\frac{1}{2}$$

16. 함수 $y = \frac{x+4}{x-2}$ 의 정의역은 $x \neq a$ 인 모든 실수이고 치역은 $y \neq b$ 인 모든 실수이다. 이 때, $a+b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

함수 $y = \frac{x+4}{x-2}$ 의 정의역이 $x \neq a$ 인 모든 실수이고
치역이 $y \neq b$ 인 모든 실수이면 $x = a$, $y = b$ 는 점근선이다.
따라서 $y = \frac{(x-2)+6}{x-2} = \frac{6}{x-2} + 1$ 에서
 $a = 2$, $b = 1$ 이므로
 $\therefore a + b = 2 + 1 = 3$

17. 분수함수 $y = \frac{x+b}{ax+1}$ 의 그래프의 점근선 중 하나가 $x = -1$ 이고 점 $(1, 2)$ 를 지난다고 한다. 이 분수함수의 정의역이 $\{x \mid -3 \leq x < -1 \text{ 또는 } -1 < x \leq 1\}$ 일 때, 치역을 구하면? (단, a, b 는 상수)

① $\{y \mid y < 0 \text{ 또는 } y > 2\}$

② $\{y \mid y \leq 0 \text{ 또는 } y \geq 2\}$

③ $\{y \mid 0 \leq y \leq 2\}$

④ $\{y \mid y < 1 \text{ 또는 } 1 < y \leq 2\}$

⑤ $\{y \mid y < 1 \text{ 또는 } y \geq 2\}$

해설

분수함수 $y = \frac{x+b}{ax+1}$ 의 그래프의

점근선 중 하나가 $x = -1$ 이므로

$$x = -\frac{1}{a} = -1$$

$$\therefore a = 1$$

따라서, 주어진 분수함수는 $y = \frac{x+b}{x+1}$

이고

이 함수의 그래프가 점 $(1, 2)$ 를 지나

므로

$$2 = \frac{1+b}{1+1} \quad \therefore b = 3$$

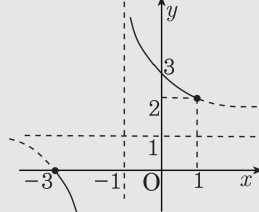
$$\therefore y = \frac{x+3}{x+1}$$

따라서 $-3 \leq x < -1$ 또는 $-1 < x \leq 1$ 에서

$$y = \frac{x+3}{x+1} = \frac{2}{x+1} + 1 \text{ 의 그래프는}$$

다음 그림과 같으므로 구하는 치역은

$$\{y \mid y \leq 0 \text{ 또는 } y \geq 2\}$$



18. 함수 $f(x) = \frac{ax}{2x+3}$ 는 그 정의역과 치역이 같다고 한다. a 의 값은?
(단, $x \neq -\frac{3}{2}$)

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

$$y = \frac{ax}{2x+3} = \frac{a}{2} + \frac{-\frac{3}{2}a}{2x+3} \text{ 이므로 치역은}$$

$$y \neq \frac{a}{2} \text{ 인 실수이다.}$$

$$\therefore \frac{a}{2} = -\frac{3}{2}, \text{ 곧 } a = -3$$

19. $x = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, $y = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ 일 때, $(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \div (\sqrt{x} + \sqrt{y})$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

해설

$$x = (\sqrt{2} + 1)^2 = 3 + 2\sqrt{2}$$

$$\therefore \sqrt{x} = \sqrt{2} + 1$$

$$y = (\sqrt{2} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$\therefore \sqrt{y} = \sqrt{2} - 1$$

$$\therefore (\text{준식}) = 2 \div 2\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

20. $x = \sqrt{3 + \sqrt{5}}$, $y = \sqrt{3 - \sqrt{5}}$ 일 때, 식 $\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}$ 의 값은?

- ① $\frac{2}{5}\sqrt{5}$ ② $-\frac{2}{5}\sqrt{5}$ ③ $\frac{4}{5}\sqrt{5}$
 ④ $-\frac{4}{5}\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{5}$

해설

$x = \sqrt{3 + \sqrt{5}}$, $y = \sqrt{3 - \sqrt{5}}$ 에서

$$\begin{cases} xy = \sqrt{9-5} = 2 \\ x^2 + y^2 = 6 \\ x^2 - y^2 = 2\sqrt{5} \end{cases} \quad \text{를 준식에 대입}$$

$$\begin{aligned} (\text{준식}) &= \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{(x-y)(x+y)} \\ &= \frac{x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2}{x^2 - y^2} \\ &= \frac{4xy}{x^2 - y^2} = \frac{4 \times 2}{2\sqrt{5}} \\ &= \frac{4\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

21. $x = 2 + \sqrt{3}$, $y = 2 - \sqrt{3}$ 일 때 $x\sqrt{y} + y\sqrt{x}$ 의 값은?

- ① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{5}$ ④ $\sqrt{6}$ ⑤ $\sqrt{7}$

해설

$$\sqrt{x} = \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{y} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{6}, \quad \sqrt{xy} = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore x\sqrt{y} + y\sqrt{x} &= \sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \\ &= 1 \times \sqrt{6} = \sqrt{6} \end{aligned}$$

22. $x = \sqrt{2} + 1$, $y = \sqrt{2} - 1$ 일 때,

$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ 의 값은?

① 1

② $\sqrt{2}$

③ 2

④ $2\sqrt{2}$

⑤ $\sqrt{3}$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \\ &= \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{x - y} \\ &= \frac{x + y - 2\sqrt{xy} + x + y + 2\sqrt{xy}}{x - y} = \frac{2(x + y)}{x - y} \\ & \begin{cases} x + y = \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} - 1 = 2\sqrt{2} \\ x - y = \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} + 1 = 2 \end{cases} \\ & \therefore \frac{2(x + y)}{x - y} = \frac{2 \times 2\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

23. 다음 등식 $x = \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \cdots}}}$ 을 만족하는 x 값을 간단히 한 것은?

- ① $\frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}$ ② $\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$ ③ 1.5
 ④ $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{7})$ ⑤ $\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

해설

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \cdots}}} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2} + x} \\ \Rightarrow x^2 &= \frac{3}{2} + x \\ \Rightarrow x^2 - x - \frac{3}{2} &= 0 \\ x &= \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2} \\ x &= \frac{1 + \sqrt{7}}{2} (\because x > 0) \end{aligned}$$