

1. 등식 $\frac{a}{x} - \frac{b}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)}$ 이 x 에 대한 항등식일 때, 상수 a, b 의 합을 구하면?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

양변에 $x(x+1)$ 을 곱하면
 $a(x+1) - bx = 1, ax + a - bx - 1 = 0$
 $x(a-b) + (a-1) = 0$
이 등식이 x 에 대한 항등식이므로
 $a = b, a = 1, b = 1$
 $\therefore a + b = 2$

2. 정의역이 $\{0, 1\}$ 인 두 함수 $f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = 2x + 1$ 에 대하여 $f = g$ 일 때, $a - b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수)

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

두 함수 f, g 가 서로 같으므로

정의역의 모든 원소 x 에 대하여 $f(x) = g(x)$ 이다.

즉, $f(0) = g(0)$, $f(1) = g(1)$ 이므로

$f(0) = b$, $g(0) = 1$ 에서 $b = 1$

$f(1) = 1 + a + b$, $g(1) = 3$ 에서 $a + b = 2$

$\therefore a = 1$

$\therefore a - b = 0$

3. 두 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{y \mid y \text{는 정수}\}$ 에 대하여 두 함수 f, g 를 X 에서 Y 로의 함수로 정의한다. $f(x) = x - 1$, $g(x) = ax^2 + bx + c$ 라 할 때, $f = g$ 가 되도록 하는 상수 a, b, c 의 곱 abc 를 구하면?

- ① -2
- ② -1
- ③ 0
- ④ 1
- ⑤ 2

해설

$f = g$ 에서
 $f(-1) = g(-1)$, $f(0) = g(0)$, $f(1) = g(1)$ 이므로
 $f(-1) = g(-1)$ 에서 $-2 = a - b + c \cdots \textcircled{1}$
 $f(0) = g(0)$ 에서 $-1 = c \cdots \textcircled{2}$
 $f(1) = g(1)$ 에서 $0 = a + b + c \cdots \textcircled{3}$
 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ 에서 $a = 0$, $b = 1$, $c = -1$
 $\therefore abc = 0$

4. $X = \{x \mid x \geq a \text{ 인 실수}\}$ 이고, $f(x) = x^2 - 6x$ 로 정의되는 함수 $f: X \rightarrow X$ 가 일대일대응이 될 때, 상수 a 의 값을 하면?

① 3

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 10

해설

$X = \{x \mid x \geq a \text{ 인 실수}\}$ 이므로

일대일 대응이 되려면

$x^2 - 6x \geq x$ 가 되어야 한다.

부등식을 풀면

$x \leq 0$ 또는 $x \geq 7$

$x \geq a$ 이므로 $x \geq 7$ 을 만족하는 x 의 최솟값이 a 가 된다.

$\therefore a = 7$

5. $x = \sqrt{6 - \sqrt{20}}$ 에 대하여 x 의 정수 부분을 a , 소수 부분을 b 라 할 때,
 $x + a - \frac{1}{b}$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{6 - \sqrt{20}} = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} \\&= \sqrt{5} - 1 = 1.\times\times\times \\ \text{정수 부분 } a &= 1, \text{ 소수 부분 } b = x - a = \sqrt{5} - 2 \\x + a - \frac{1}{b} &= \sqrt{5} - 1 + 1 - \frac{1}{\sqrt{5} - 2} \\&= \sqrt{5} - (\sqrt{5} + 2) = -2\end{aligned}$$

6. $\sqrt{12-6\sqrt{3}}$ 의 정수 부분을 a , 소수 부분을 b 라고 할 때, $\frac{6}{a+b}+b$ 의 값은?

- ① 0 ② $\frac{2}{3}$ ③ 2 ④ 3 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{12-6\sqrt{3}} &= \sqrt{12-2\sqrt{27}} = 3 - \sqrt{3} \\ a &= 1, \quad b = 2 - \sqrt{3} \quad (\because 1 < \sqrt{3} < 2) \\ \therefore \frac{6}{a+b} + b &= \frac{6}{3-\sqrt{3}} + 2 - \sqrt{3} = 5\end{aligned}$$

7. 무리수 $\sqrt{k}$ 의 정수 부분을 a , 소수 부분을 b 라 할 때, $a^3 + b^3 = 9ab$ 을 만족하는 양의 정수 k 를 구하면?

① 6 ② 4 ③ 2 ④ 1 ⑤ 11

해설

$\sqrt{k} = a + b \quad \therefore b = \sqrt{k} - a$
 $a^3 + b^3 = 9ab, \quad a^3 + (\sqrt{k} - a)^3 = 9a(\sqrt{k} - a)$
 $\therefore 3a(3a - k) + \sqrt{k}(3a^2 - 9a + k) = 0$
 a, k 가 정수이므로
 $3a(3a - k) = 0, \quad 3a^2 - 9a + k = 0$
연립하여 풀면
 $\therefore a = 2, \quad k = 6$

8. 다음 등식은 분모를 0으로 하지 않는 모든 x 의 값에 대하여 성립한다.

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{a_1}{x-3} + \frac{a_2}{x-2} + \frac{a_3}{x-1}$$

이때, $a_1 + a_2 + a_3 = \langle 가 \rangle$, $3a_1 + 4a_2 + 5a_3 = \langle 나 \rangle$ 라 할 때, $\langle 가 \rangle$, $\langle 나 \rangle$ 에 알맞은 수를 순서대로 구하여라.

해설

(1) 단계

양변에 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 을 곱하면

$$x+1 = a_1(x-1)(x-2) + a_2(x-1)(x-3) + a_3(x-2)(x-3)$$

(2) 단계

이차항의 계수를 비교하면 $0 = a_1 + a_2 + a_3 \cdots \langle 가 \rangle$

(3) 단계

일차항의 계수를 비교하면

$$1 = (-3a_1) + (-4a_2) + (-5a_3)$$

$$\therefore 3a_1 + 4a_2 + 5a_3 = -1 \cdots \langle 나 \rangle$$

9. 다음 등식이 $x \neq 0$, $x \neq -1$ 인 모든 실수 x 에 대하여 항상 성립하도록 상수 a, b, c 의 값을 정하여라.

$$\frac{2x+1}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$$

해설

(1) 단계

준식의 우변을 통분하면

$$\begin{aligned} & \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2} \\ &= \frac{a(x+1)^2 + bx(x+1) + cx}{x(x+1)^2} \\ &= \frac{(a+b)x^2 + (2a+b+c)x + a}{x(x+1)^2} \end{aligned}$$

(2) 단계

따라서

$$\begin{aligned} & \frac{2x+1}{x(x+1)^2} \\ &= \frac{(a+b)x^2 + (2a+b+c)x + a}{x(x+1)^2} \text{ 가} \end{aligned}$$

$x \neq 0$, $x \neq -1$ 인 모든 실수 x 에 대하여 항상 성립하므로 양변의 분자가 반드시 같아야 한다.

$$\text{즉, } 2x+1 = (a+b)x^2 + (2a+b+c)x + a$$

양변의 계수를 비교하면

$$a+b=0, 2a+b+c=2, a=1$$

(3) 단계

$$\therefore a=1, b=-1, c=1$$