

1. 두 점 $(1, -3)$, $(3, 2)$ 로부터 거리가 같고, 직선 $y = 2x$ 위에 있는 점의 좌표는?

① $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$

② $\left(\frac{1}{7}, \frac{1}{3}\right)$

③ $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{3}\right)$

④ $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right)$

⑤ $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$

해설

$y = 2x$ 위에 있으므로 $(a, 2a)$ 로 놓으면

$$\sqrt{(1-a)^2 + (-3-2a)^2}$$

$$= \sqrt{(3-a)^2 + (2-2a)^2}$$

$$a^2 - 2a + 1 + 4a^2 + 12a + 9 = a^2 - 6a + 9 + 4a^2 - 8a + 4$$

$$10a + 10 = -14a + 13$$

$$\therefore 24a = 3$$

$$\therefore a = \frac{1}{8}, 2a = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$$

2. 좌표평면 위의 세 점 A(4, -2), B(1, 7), C(-2, 1)을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 는 어떤 삼각형인가?
- ① 정삼각형

② 이등변삼각형

③ 직각삼각형

④ 예각삼각형

⑤ 직각이등변삼각형

해설

세변의 길이는

$$\overline{AB} = \sqrt{(1-4)^2 + (7-(-2))^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$
$$\overline{BC} = \sqrt{(-2-1)^2 + (1-7)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$
$$\overline{CA} = \sqrt{(4-(-2))^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

따라서 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$ 이고, $\overline{BC} = \overline{CA}$ 이므로 직각이등변삼각형이다.

3. 네 점 A(3, 5), B(a , 10), C(-1, -1), D(-2, b)를 꼭짓점으로 하는 사각형이 평행사변형이 될 때, a , b 에 대하여 $a + b$ 의 값은?

① -2 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

평행사변형이 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다.

즉, ($\overline{AC}$ 의 중점)=($\overline{BD}$ 의 중점)이므로

$$\begin{aligned}(\overline{AC} \text{의 중점}) &= \left(\frac{3+(-1)}{2}, \frac{5+(-1)}{2} \right) = (1, 2) \\ &= \left(\frac{a+(-2)}{2}, \frac{10+b}{2} \right)\end{aligned}$$

$$\frac{a+(-2)}{2} = 1, \frac{10+b}{2} = 2 \text{ 에서 } a = 4, b = -6$$

$$\therefore a + b = -2$$

4. 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $G(2, -1)$ 이고 세 변 AB, BC, CA를 2 : 1로 내분하는 점이 각각 $P(a, 3)$, $Q(-2, -2)$, $R(5, b)$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

삼각형 ABC의 무게중심과 삼각형 PQR의 무게중심은 일치한다.

삼각형 PQR의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{a-2+5}{3}, \frac{3-2+b}{3}\right)$ 이므로

$\frac{a+3}{3} = 2$ 에서 $a = 3$

또 $\frac{1+b}{3} = -1$ 에서 $b = -4$

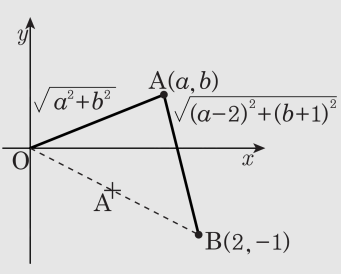
$\therefore a + b = -1$

5. 좌표평면 위에 점 $O(0, 0)$, $A(a, b)$, $B(2, -1)$ 이 있다. 이때, $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{(a-2)^2 + (b+1)^2}$ 의 최솟값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ $\sqrt{5}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

해설

$\sqrt{a^2 + b^2}$ 은 $\overline{OA}$ 의 길이이고,
 $\sqrt{(a-2)^2 + (b+1)^2}$ 은 $\overline{AB}$ 의 길이이다.
따라서, 준 식은 O, A, B 가 일
직선상에 있을 때
최소가 된다. (그림 참조)
따라서, $\overline{OA} + \overline{AB}$ 의 최솟값은
 $\overline{OB} = \sqrt{5}$



6. 좌표평면 위에 서로 다른 세 점 $A(-2k-1, 5)$, $B(k, -k-10)$, $C(2k+5, k-1)$ 가 일직선 위에 있을 때, k 의 값의 곱을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

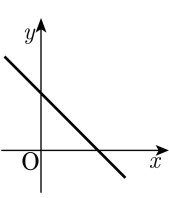
세 점 A, B, C가 일직선 위에 있으므로
직선 AB와 직선 BC의 기울기는 같다.

$$\frac{-k-10-5}{k-(-2k-1)} = \frac{(k-1)-(-k-10)}{2k+5-k}$$

이 식을 정리하면 $k^2 + 7k + 12 = 0$

$\therefore k$ 의 값의 곱은 12이다.

7. 직선 $ax + by + c = 0$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때 $cx + by + a = 0$ 의 그래프가 지나지 않는 사분면은?



- ① 제 1 사분면 ② 제 2 사분면
③ 제 3 사분면 ④ 제 4 사분면
⑤ 제 1, 3 사분면

해설

직선 $ax + by + c = 0$ 은

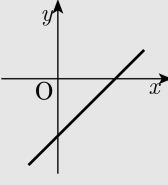
$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ 이므로

$-\frac{a}{b} < 0, -\frac{c}{b} > 0$ 이다.

구하는 직선은 $y = -\frac{c}{b}x - \frac{a}{b}$ 이므로

그래프는 다음과 같다.

따라서 지나지 않는 사분면은 제2 사분면이다.



8. 직선 $x + ay + 1 = 0$ 이 직선 $2x + by + 1 = 0$ 에 수직이고 직선 $x - (b - 1)y - 1 = 0$ 과 평행할 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

두 직선 $x + ay + 1 = 0, 2x + by + 1 = 0$ 이 서로 수직이므로

$$1 \cdot 2 + a \cdot b = 0 \quad \therefore ab = -2 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$$

두 직선 $x + ay + 1 = 0, x - (b - 1)y - 1 = 0$ 이 서로 평행하므로

$$\frac{1}{1} = \frac{a}{1-b} \neq \frac{1}{-1} \quad \therefore a + b = 1 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$$

$$\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}} \text{ 에서 } a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$$

$$\therefore 1 - 2 \cdot (-2) = 5$$

9. 두 직선 $2x + 3y = 3$, $3x - 2y = -2$ 의 교점을 지나고, 한 점 $(-1, 2)$ 를 지나는 직선의 방정식은?

- ① $x + y + 1 = 0$ ② $x + y - 1 = 0$ ③ $2x + y - 1 = 0$
④ $2x + y + 1 = 0$ ⑤ $3x + y - 1 = 0$

해설

두 직선 $ax + by + c = 0$ 과 $a'x + b'y + c' = 0$ 의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$ax + by + c + k(a'x + b'y + c') = 0$$

두 직선 $2x + 3y = 3$ 과 $3x - 2y = -2$ 의

교점을 지나는 직선의 방정식은

$$2x + 3y - 3 + k(3x - 2y + 2) = 0 \text{ 이고}$$

이 직선이 점 $(-1, 2)$ 를 지나므로

대입하여 k 값을 구하면 $k = \frac{1}{5}$ 이다.

$$\text{따라서 } 2x + 3y - 3 + \frac{1}{5}(3x - 2y + 2) = 0$$

$$\therefore x + y - 1 = 0$$

10. $x + 2y - 3 = 0$, $2x - y - 1 = 0$ 에 이르는 거리가 같은 x 축 위의 점의 좌표를 구하면?

- ① $(-2, 0)$, $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ ② $(-2, 0)$, $(2, 0)$
③ $(0, -2)$, $\left(0, \frac{4}{3}\right)$ ④ $(0, -2)$, $(0, 2)$
⑤ $(-2, 0)$, $(0, 0)$

해설

x 축 위의 점을 $(\alpha, 0)$ 이라 하자.

점과 직선 사이의 거리 구하는 공식을 이용하면,

$$\frac{|\alpha - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|2\alpha - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$$

$$\Rightarrow |\alpha - 3| = |2\alpha - 1|$$

$$\Rightarrow (\alpha - 3)^2 = (2\alpha - 1)^2$$

$$\Rightarrow 3\alpha^2 + 2\alpha - 8 = 0$$

$$\alpha = \frac{4}{3} \text{ 또는 } -2$$

$$\therefore \left(\frac{4}{3}, 0\right), (-2, 0)$$

11. 점 $(3, 4)$ 에서 직선 $2x - y + k = 0$ 까지의 거리가 $\sqrt{5}$ 일 때, 양수 k 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\frac{|2 \times 3 - 4 + k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5} \text{ 이므로, } |2 + k| = 5 \text{ 이다.}$$

따라서 $k = 3$ ($\because k$ 는 양수)

12. 세 직선 $x + 2y - 2 = 0$, $3x - y - 6 = 0$, $2x - 3y + 3 = 0$ 에 의하여 만들어지는 삼각형의 넓이는?

- ① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

해설

$$\begin{cases} x + 2y - 2 = 0 \cdots \textcircled{A} \\ 3x - y - 6 = 0 \cdots \textcircled{B} \\ 2x - 3y + 3 = 0 \cdots \textcircled{C} \end{cases}$$

③과 ④, ③과 ⑤, ④과 ⑤의 교점을 각각

A, B, C라 하고 교점을 구한다.

(i) ③ + ④ $\times 2$ 에서 $x = 2, y = 0$.

$\therefore A = (2, 0)$

(ii) ③ $\times 2 -$ ⑤에서 $x = 0, y = 1$.

$\therefore B = (0, 1)$

(iii) ④ $\times 3 -$ ⑤에서 $x = 3, y = 3$.

$\therefore C = (3, 3)$

$\overline{BC}$ 를 밑변으로 하면,

밑변의 길이는 $\overline{BC} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

높이는 A와 ⑤ 사이의 거리이므로

삼각형의 넓이는 $\frac{|4 - 0 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{7}{\sqrt{13}}$

$\therefore \triangle ABC$ 의 넓이는 $\frac{1}{2} \sqrt{13} \frac{7}{\sqrt{13}} = \frac{7}{2}$

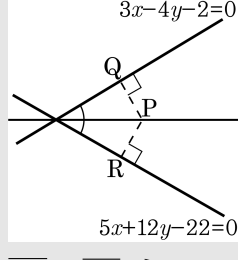
13. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의 점 $P(X, Y)$ 에 대하여 P에서 두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q,R이라 하면



$\overline{PQ} = \overline{PR}$ 이므로

$$\frac{|3X-4Y-2|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|5X+12Y-22|}{\sqrt{25+144}}$$

$$13(3X-4Y-2) = \pm 5(5X+12Y-22)$$

$$\text{즉, } 13(3X-4Y-2) = 5(5X+12Y-22) \text{ 또는}$$

$$13(3X-4Y-2) = -5(5X+12Y-22) \text{ 정리하면}$$

$$x-8y+6=0 \text{ 또는 } 8x+y-17=0 \text{ 에서}$$

기울기가 양이므로

$$\therefore x-8y+6=0$$

$$\therefore a+b+c=-1$$

14. 좌표평면 위의 두 점 A(1, 0), B(5, 0) 에 대하여 선분 AB 의 중점과 선분 AB 를 1 : 3 으로 외분하는 점을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식은?

① $(x - 1)^2 + y^2 = 4$

② $x^2 + y^2 = 4$

③ $(x - 1)^2 + y^2 = 2$

④ $x^2 + (y - 4)^2 = 16$

⑤ $x^2 + (y - 1)^2 = 2$

해설

선분 AB 의 중점은 (3, 0)이고,
선분 AB를 1 : 3으로 외분하는 점은 (-1, 0) ,
이 두 점을 지름의 양 끝점으로 하는
원의 방정식은 중심이 M(1, 0), 반지름 2 인 원이다.
따라서 $(x - 1)^2 + y^2 = 4$

15. 두 원 $x^2 + y^2 - 5 = 0$, $x^2 + y^2 - 3x - y - 4 = 0$ 의 교점과 점(1,1)을 지나는 원의 방정식이 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 일 때, $A + B - C$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$$x^2 + y^2 - 5 = 0, x^2 + y^2 - 3x - y - 4 = 0$$

교점을 지나는 원의 방정식은

$$(x^2 + y^2 - 5)m + x^2 + y^2 - 3x - y - 4 = 0$$

의 꼴이고, 이 원이 점 (1,1)을지나므로

$$(1 + 1 - 5)m + 1 + 1 - 3 - 1 - 4 = 0$$

$$\therefore m = -2$$

이 값을 대입하고 정리하면

$$x^2 + y^2 + 3x + y - 6 = 0 \text{ 이다.}$$

$$\therefore A = 3, B = 1, C = -6$$

$$\text{그러므로 } A + B - C = 10$$

17. 직선 $y = x + n$ 과 원 $x^2 + y^2 = 8$ 이 만나지 않도록 하는 자연수 n 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

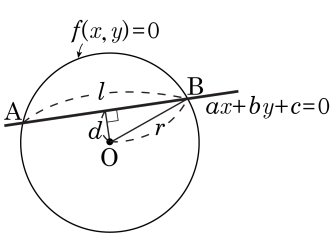
점 $(0, 0)$ 에서 직선 $y = x + n$ 까지의 거리가
반지름의 길이 $2\sqrt{2}$ 보다 크면 된다.

$$\frac{|n|}{\sqrt{2}} > 2\sqrt{2}$$

$\therefore n > 4$ ($\because n$ 은 자연수)

$\therefore$ 최소의 n 은 5이다.

18. 원의 방정식 $f(x, y) = 0$ 과 직선 $ax + by + c = 0$ 이 다음 그림과 같이 위치해 있을 때, 도형의 방정식 $f(x, y) + k(ax + by + c) = 0$ 이 나타낼 수 있는 도형의 최소 넓이는?



- ① $\pi(r - d^2)$ ② πr^2 ③ $\pi\left(\frac{1}{2}l\right)^2$
 ④ $\pi(r^2 + q^2)$ ⑤ πl^2

해설

도형의 넓이가 최소일 때는 l 이 지름일 때 이므로

도형의 넓이는 $\pi\left(\frac{1}{2}l\right)^2$ 이 정답이다.

19. 평행이동 $(x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$ 에 의하여 점 $(2, 1)$ 이 점 $(1, -1)$ 로 옮겨질 때, $(0, 0)$ 는 어느 점으로 옮겨지는가?

① $(1, 2)$

② $(-1, 2)$

③ $(1, -2)$

④ $(-1, -2)$

⑤ $(2, 1)$

해설

점 $(2, 1)$ 이 점 $(1, -1)$ 로 옮겨지면, x 축 방향으로 -1 , y 축 방향으로 -2 만큼 평행이동 하므로 $(0 - 1, 0 - 2) = (-1, -2)$ 로 이동한다.

20. 점 $(2, 3)$ 을 점 $(1, 5)$ 로 옮기는 평행이동 T 에 의하여 직선 $y = ax + b$ 가 직선 $y = 3x - 2$ 로 옮겨질 때, 상수 a, b 의 곱 ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -21

해설

평행이동 T 에 의하여 점 $(2, 3)$ 이 점 $(1, 5)$ 로 옮겨지므로
 $T : (x, y) \rightarrow (x + m, y + n)$ 이라고 하면,

$(2, 3) \xrightarrow{T} (1, 5)$ 에서

$$2 + m = 1, 3 + n = 5 \quad \therefore m = -1, n = 2$$

$$\therefore T : (x, y) \rightarrow (x - 1, y + 2)$$

따라서, T 는 x 축의 방향으로 -1 만큼,

y 축의 방향으로 2 만큼 옮기는 평행이동이다.

한편, 평행이동 T 에 의하여 직선 $y = ax + b$ 가

옮겨지는 직선의 방정식은

$$y - 2 = a(x + 1) + b$$

$$\therefore y = ax + a + b + 2 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때, $\textcircled{1}$ 이 $y = 3x - 2$ 와 같아야 하므로

$$a = 3, a + b + 2 = -2$$

$$\therefore a = 3, b = -7 \quad \therefore ab = -21$$

21. 원 $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 40 = 0$ 을 직선 $3x + ay + 6 = 0$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식이 $(x + 1)^2 + (y - 8)^2 = 1$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$x^2 + y^2 - 10x - 8y + 40 = 0$ 을 표준형으로 나타내면

$$(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 1 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①은 원 $(x + 1)^2 + (y - 8)^2 = 1$ 과

직선 $3x + ay + 6 = 0$ 에 대하여 대칭이므로

두 원의 중심 $(5, 4)$, $(-1, 8)$ 을 이은 선분의

중점이 직선 $3x + ay + 6 = 0$ 위에 있다.

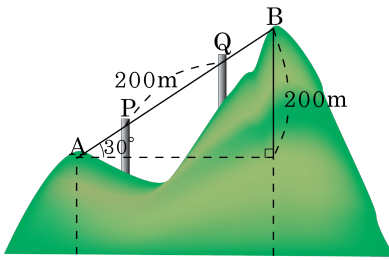
두 점 $(5, 4)$, $(-1, 8)$ 을 이은 선분의 중점은

$$\left(\frac{5 + (-1)}{2}, \frac{4 + 8}{2} \right), \text{ 즉 } (2, 6) \text{ 이므로}$$

$$3 \cdot 2 + a \cdot 6 + 6 = 0$$

$$\therefore a = -2$$

22. 다음 그림과 같이 두 산봉우리 A, B 지점을 직선으로 잇는 케이블을 설치하려고 한다. A, B의 높이 차는 200 m 이고, A 에서 B 를 올려다 본 각은 30° 이다. 선분 AB 를 $m : n$ 으로 내분하는 점 P 와 $n : m$ 으로 내분하는 점 Q 에 각각 지지대를 설치했더니, P 와 Q 사이의 거리가 200 m 가 되었다. 이때, $\frac{n}{m}$ 의 값은? (단, 케이블의 늘어짐은 무시한다.)



- ① $\frac{5}{3}$ ② 2 ③ $\frac{7}{3}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

$$\overline{AB} = \frac{200}{\sin 30^\circ} = 400(\text{m})$$

$$\overline{AP} : \overline{PB} = m : n, \overline{AQ} : \overline{QB} = n : m \text{ 이므로}$$

$$\overline{AP} = x \text{ 라 하면}$$

$$\overline{QB} = 200 - x$$

$$\overline{AP} : \overline{PB} = m : n, \overline{AQ} : \overline{QB} = n : m \text{ 이므로}$$

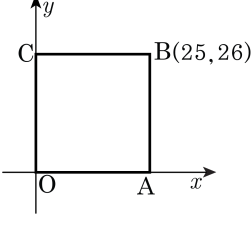
$$x : (400 - x) = (200 - x) : (200 + x)$$

$$\therefore x = 100$$

$$\overline{AP} : \overline{PB} = 100 : 300$$

$$\therefore \frac{n}{m} = 3$$

23. 좌표평면 위에서 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점을 격자점이라 한다.
직선 $y = \frac{3}{8}x + 1$ 은 아래 그림과 같은 직사각형 OABC 내부 (경계선 제외)의 격자점을 모두 몇 개 지나는가?



- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

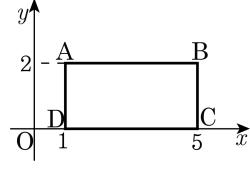
해설

$y = \frac{3}{8}x + 1$ 에서 x 가 8의 배수이면 y 도 정수가 된다.

$0 < x < 25$, $0 < y < 26$ 에서 조건을 만족하는 정수의 순서쌍을 구하면

(8, 4), (16, 7), (24, 10)으로 모두 3개의 격자점을 지난다.

24. 점 $(-1, -1)$ 을 지나고 다음 그림과 같은 직사각형 ABCD의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식이 $ax + by + 1 = 0$ 일 때, $a - b$ 의 값은?



- ① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$(-1, -1)$ 을 지나므로, $-a - b + 1 = 0 \cdots \textcircled{1}$
 그리고 직선이 사각형을 이등분 하려면 사각형의 중심
 $(\frac{5+1}{2}, \frac{0+2}{2})$ 를 지나야 한다.
 $\Rightarrow 3a + b + 1 = 0 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ 과 $\textcircled{2}$ 을 연립하면, $a = -1, b = 2$
 $\therefore a - b = -3$

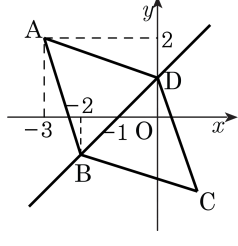
25. 두 직선 $y = ax$ 와 $y = bx$ 가 서로 수직이고, 직선 $x = 2$ 와 만나는 두 점을 P, Q라 할 때, P, Q의 중점이 $\left(2, \frac{3}{2}\right)$ 이다. 이때, $|a - b|$ 의 값은?
(단, $a > 0, b < 0$)

- ① 1
- ② 2
- ③ $\frac{3}{2}$
- ④ $\frac{5}{2}$
- ⑤ 4

해설

$P(2, 2a), Q(2, 2b)$
 $\therefore$ P, Q의 중점 : $\left(\frac{2+2}{2}, \frac{2a+2b}{2}\right) = \left(2, \frac{3}{2}\right)$
 $\Rightarrow a + b = \frac{3}{2} \cdots \textcircled{\text{㉠}}$
 $y = ax$ 와 $y = bx$ 가 서로 수직이므로
 $a \times b = -1 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$
 $\therefore (a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$ 이므로
 $(a - b)^2 = \frac{9}{4} + 4$
 $\Rightarrow a - b = \frac{5}{2} \quad (\because a > 0, b < 0)$

26. 다음 그림에서 점 B와 점 D를 지나는 직선의 x 절편이 -1 이고 $A(-3, 2)$ 일 때, 마름모 ABCD의 넓이를 구하면?



▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

대각선 BD의 중점은 $M(-1, 0)$, 사각형 ABCD가 마름모이므로

$\overline{AM} \perp \overline{BD}$,

$\overline{AM}$ 의 기울기가 -1 이므로

$\overline{BD}$ 의 기울기는 1 ,

점 B와 점 D의 y 값을 a, b 라 하면

$b - a = 2, \frac{a + b}{2} = 0$ 이므로 $a = -1, b = 1$ 이다.

$\therefore D(0, 1)$

$\overline{AM} = 2\sqrt{2}, \overline{MD} = \sqrt{2}$ 이므로

마름모 ABCD의 넓이는

$$4 \left(\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} \right) = 8$$

27. 서로 다른 두 직선 $2x - ay - 2 = 0$, $x - (a - 3)y - 3 = 0$ 이 평행할 때, 두 직선 사이의 거리를 구하면?

- ① $\frac{\sqrt{6}}{5}$ ② $\frac{\sqrt{7}}{5}$ ③ $\frac{2\sqrt{2}}{5}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{\sqrt{10}}{5}$

해설

$$\begin{cases} 2x - ay - 2 = 0 \\ x - (a - 3)y - 3 = 0 \end{cases} \quad \text{정리하면}$$

$$\begin{cases} y = \frac{2}{a}x - \frac{2}{a} \\ y = \frac{1}{a-3}x - \frac{3}{a-3} \end{cases} \quad \text{평행하므로}$$

$$\frac{2}{a} = \frac{1}{a-3}$$

$\therefore a = 6$ 대입하면

$$\begin{cases} x - 3y - 1 = 0 \\ x - 3y - 3 = 0 \end{cases}$$

$x - 3y - 1 = 0$ 위의 점 $(1, 0)$ 과 $x - 3y - 3 = 0$ 과의 거리는

$$\therefore \frac{|1 - 3|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{2\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

28. 제1 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 r 인 원의 중심을 C_1 , 제2 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}r$ 인 원의 중심을 C_2 , 제3 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{4}r$ 인 원의 중심을 C_3 , 제4 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{8}r$ 인 원의 중심을 C_4 라 하자.

$\overline{C_1C_2} + \overline{C_2C_3} + \overline{C_3C_4} = 14\sqrt{10}$ 일 때, r 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$$\begin{aligned} & C_1(r, r), C_2\left(-\frac{1}{2}r, \frac{1}{2}r\right), \\ & C_3\left(-\frac{1}{4}r, -\frac{1}{4}r\right), C_4\left(\frac{1}{8}r, -\frac{1}{8}r\right) \text{ 이므로} \\ & \overline{C_1C_2} + \overline{C_2C_3} + \overline{C_3C_4} \\ &= \sqrt{\left(-\frac{3}{2}r\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}r\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{4}r\right)^2 + \left(-\frac{3}{4}r\right)^2} \\ & \quad + \sqrt{\left(\frac{3}{8}r\right)^2 + \left(\frac{1}{8}r\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{10}}{2}r + \frac{\sqrt{10}}{4}r + \frac{\sqrt{10}}{8}r \\ &= \frac{7\sqrt{10}}{8}r = 14\sqrt{10} \\ &\therefore r = 16 \end{aligned}$$

29. 두 원 $(x-1)^2 + y^2 = 9$ 와 $(x+2)^2 + y^2 = 24$ 의 공통현의 길이를 구하면?

- ① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

두 원 $(x-1)^2 + y^2 = 9$,
 $(x+2)^2 + y^2 = 24$
 즉, $x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$,
 $x^2 + y^2 + 4x - 20 = 0$ 의 공통
 현의 방정식은
 $(x^2 + y^2 - 2x - 8) -$
 $(x^2 + y^2 + 4x - 20) = 0$
 $-6x + 12 = 0 \quad \therefore x = 2$
 $(x-1)^2 + y^2 = 9$ 의 중심 $(1, 0)$ 과 $x = 2$ 와의 거리 $d = 1$
 따라서, 다음 그림에서 원의 공통현은 $\overline{AB}$ 이고,
 $\overline{AM} = \overline{BM}$ 이므로 공통현의 길이는
 $\overline{AB} = 2\overline{AM} = 2\sqrt{3^2 - 1} = 4\sqrt{2}$

30. 두 원 $x^2 + y^2 = 16$, $x^2 + (y - 4)^2 = 1$ 의 공통접선의 y 절편은?

- ① $\frac{26}{5}$ ② $\frac{21}{4}$ ③ $\frac{16}{3}$ ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

해설

공통접선의 방정식을 $y = mx + n$ 이라 하면
원의 중심에서 직선까지의 거리가 반지름의 길이와 같다.
중심 (0, 0) 에서 접선까지의 거리가 4 ,
중심 (0, 4) 에서 접선까지의 거리가 1 이므로

$$\frac{|n|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 4$$

$$\frac{|-4 + n|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 1$$

두 식을 연립하여 풀면

$$4|-4 + n| = |n|$$

$$4(-4 + n) = \pm n$$

$$\therefore n = \frac{16}{5}, \frac{16}{3} \quad n > 5 \text{ 이므로}$$

구하는 공통접선의 y 절편은 $\frac{16}{3}$

31. 두 점 A(-2, 2), B(3, 4) 가 있다. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 임의의 두 점을 P, Q 라 할 때, AP 의 최댓값과 BQ 의 최솟값의 합은 ?

- ① 3
 ② $2 + 2\sqrt{2}$
③ $5 + 2\sqrt{2}$
- ④ $4 + 2\sqrt{2}$
 ⑤ 7

해설

그림과 같이 P 와 Q 가 있을 때 $\overline{AP}$ 는 최대가되고 $\overline{BQ}$ 는 최소가 된다.

$\therefore \overline{AP}$ = 반지름의 길이+ 원의 중심과 A 까지의 거리

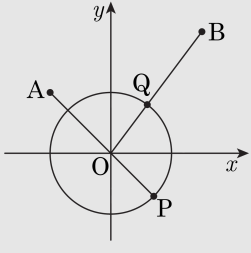
$$= 2 + \sqrt{(-2-0)^2 + (2-0)^2} = 2 + 2\sqrt{2}$$

$\overline{BQ}$ = 원의 중심과 B 까지의 거리- 반지름의 길이

$$= \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} - 2$$

$$= 5 - 2 = 3$$

$$\therefore \text{구하는 답은 } (2 + 2\sqrt{2}) + 3 = 5 + 2\sqrt{2}$$



32. 직선 $y = \frac{3}{2}x - 3$ 을 x 축 방향으로 a 만큼, y 축 방향으로 b 만큼 평행이동한 직선은 네 점 P(1, 3), Q(3, 0), R(5, 3), S(3, 6)을 꼭짓점으로 하는 마름모 PQRS의 넓이를 이등분한다. 이 때, a, b 사이의 관계식은?
- ① $a + b + 1 = 0$ ② $2a - 3b + 3 = 0$
③ $3a - b + 3 = 0$ ④ $2a - 2b + 1 = 0$
⑤ $3a - 2b + 3 = 0$

해설

직선 $y = \frac{3}{2}x - 3$ 을
 x 축의 방향으로 a 만큼,
 y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 직선은
 $y - b = \frac{3}{2}(x - a) - 3 \cdots \textcircled{1}$
직선 $\textcircled{1}$ 이 마름모 PQRS의 넓이를
이등분하려면 대각선
 $\overline{PR}$ 와 $\overline{QS}$ 의 교점인 $\overline{PR}$ 의 중점을 지나야 한다.
이 때, $\overline{PR}$ 의 중점을 M이라 하면 M의 좌표는 $\left(\frac{1+5}{2}, \frac{3+3}{2}\right) =$
(3, 3)
직선 $\textcircled{1}$ 이 점 (3, 3)을 지나므로
 $3 - b = \frac{3}{2}(3 - a) - 3, 6 - 2b = 3(3 - a) - 6$
 $\therefore 3a - 2b + 3 = 0$

33. 점 (1, 4) 를 지나는 직선을 원점에 대하여 대칭이동한 직선이 점 (2, 5) 를 지날 때, 처음 직선의 기울기는?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

원점에 대하여 대칭이동한 직선이 점 (2, 5) 를 지나므로 처음 직선은 점 (-2, -5) 를 지난다.

따라서 처음 직선은 두 점 (1, 4), (-2, -5) 를

지나므로 구하는 기울기는 $\frac{4 - (-5)}{1 - (-2)} = 3$

34. 좌표평면 위의 세 점 A(3, 4), B(0, 0), C(8, -8)에 대하여 $\angle BAC$ 의 이등분선이 선분 BC와 만나는 교점의 좌표는?

- ① $\left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\right)$ ② $\left(\frac{20}{9}, -\frac{20}{9}\right)$ ③ $\left(\frac{15}{11}, -\frac{15}{11}\right)$
 ④ $\left(\frac{25}{13}, -\frac{25}{13}\right)$ ⑤ $\left(\frac{28}{17}, -\frac{28}{17}\right)$

해설

$$\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(8-3)^2 + (-8-4)^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$$

$\angle BAC$ 의 이등분선이 선분 BC와 만나는 교점을 D(x, y)라 하면 각의 이등분선의 성질에 의하여

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC} = 5 : 13$$

따라서, 점 D(x, y)는 선분 BC를 5 : 13으로 내분하는 점이므로

$$x = \frac{5 \cdot 8 + 13 \cdot 0}{5 + 13} = \frac{20}{9},$$

$$y = \frac{5 \cdot (-8) + 13 \cdot 0}{5 + 13} = -\frac{40}{18} = -\frac{20}{9}$$

$$\therefore D\left(\frac{20}{9}, -\frac{20}{9}\right)$$

35. 두 점 A(-5, -2), B(2, 5) 에 대하여 원 $x^2 + y^2 = 9$ 위를 움직이는 점을 P 라고 할 때, $\triangle ABP$ 의 무게중심 G 가 나타내는 도형의 자취의 길이는?

- ① π
- ② 2π
- ③ 3π
- ④ 4π
- ⑤ 5π

해설

A(-5, -2) B(2, 5) P(x, y)
G $\left(\frac{x-3}{3}, \frac{y+3}{3}\right)$
 $X = \frac{x-3}{3}, Y = \frac{y+3}{3}$
 $x = 3X + 3, y = 3Y - 3$
(x, y) 가 $x^2 + y^2 = 9$ 위를 움직이므로,
 $(3X + 3)^2 + (3Y - 3)^2 = 9$
 $(X + 1)^2 + (Y - 1)^2 = 1$
따라서 G(X, Y) 는 반지름이 1 인 원
 $\rightarrow 2\pi \cdot 1 = 2\pi$