1. 임의의 실수 x에 대하여 등식 $(x-2)(x+2)^2=(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+c$이 성립할 때, $a(b+c)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -30

해설

$(x-2)(x+2)^2=(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+c$
양변에 $x=2,-2,1$을 각각 대입하면
$0=1+a+b+c,\ 0=-27+9a-3b+c,\ -9=c$
세 식을 연립하여 풀면 $a=5,\ b=3,\ c=-9$
$\therefore\ a(b+c)=5\times(3-9)=-30$

해설

좌변을 전개한 후 조립제법으로 풀어도 좋다.
$(x-2)(x+2)^2$
$=x^3+2x^2-4x-8$
$=(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+c$
$=(x-1)[(x-1)\{(x-1)+a\}+b]+c$

$$
\begin{array}{c|cccccc}
1 & 1 & 2 & -4 & -8 & & \\
 & & 1 & 3 & -1 & & \\
\hline
1 & 1 & 3 & -1 & \boxed{-9} & \leftarrow & \mathrm{c} \\
 & & 1 & 4 & & & \\
\hline
1 & 1 & 4 & \boxed{3} & \leftarrow & \mathrm{b} & \\
 & & 1 & & & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{5} & \leftarrow \mathrm{a} & & &
\end{array}
$$

$\therefore\ a(b+c)=5(3-9)=-30$

2. 등식 $(2k+1)y-(k+3)x+10=0$ 이 k의 값에 관계없이 항상 성립하도록 하는 상수 x, y 에 대하여 $x+y$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

(준식)$=(y-3x+10)+(2y-x)k=0$

$\therefore 2y=x, y-3x=-10$

$\therefore x=4, y=2$

$\therefore x+y=6$

3. x의 다항식 x^3+ax+b를 x^2-3x+2로 나눌 때, 나머지가 $2x+1$이 되도록 상수 a, b의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

x^3+ax+b를 x^2-3x+2로 나눌 때,
몫을 $x+q$라 하면 (일반적으로 $px+q$로 해야겠지만 x^3의 계수가 1이므로 $x+q$)
$x^3+ax+b=(x^2-3x+2)(x+q)+2x+1$
$\therefore\ x^3+ax+b=(x-2)(x-1)(x+q)+2x+1$
이 등식은 x에 관한 항등식이므로
$x=1$을 대입하면 $1+a+b=2+1 \cdots$ ㉠
$x=2$를 대입하면 $8+2a+b=4+1 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $a=-5$, $b=7$
$\therefore\ a+b=2$

4. x에 관한 항등식 $(x^2+x+1)^5 = a_{10}(x+1)^{10}+a_9(x+1)^9+\cdots+a_1(x+1)+a_0$에서 $a_0+a_1+\cdots+a_9+a_{10}$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 16 ④ 32 ⑤ 64

해설

주어진 식에 $x=0$을 대입하면

$(0+0+1)^5 = a_{10}+a_9+\cdots+a_1+a_0$

$\therefore\ a_0+a_1+\cdots+a_9+a_{10}=1$

5. 두 다항식 $f(x) = x^2 + 3x + a$, $g(x) = x^3 + ax$를 $x + 2$로 나눈 나머지가 같을 때, 상수 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -2$

해설

$f(x) = x^2 + 3x + a$, $g(x) = x^3 + ax$에서
$f(-2) = g(-2)$이므로
$4 - 6 + a = -8 - 2a$
$\therefore\ a = -2$

6. 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$가 다음 두 조건을 만족한다.

(가) $f(x)+g(x)=2x^2-2x-4$
(나) $f(x)$와 $g(x)$의 최소공배수는 x^3-7x+6

이 때, $f(x)$와 $g(x)$의 최대공약수를 $G(x)$라 할 때, $G(2)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

두 다항식 $f(x)$와 $g(x)$의 최소공배수는

$$L(x)=(x-1)(x^2+x-6)$$
$$=(x-1)(x-2)(x+3)\cdots㉠$$

또, 두 다항식 $f(x)$와 $g(x)$의 최대공약수가 $G(x)$이므로

$f(x)=G(x)A(x)$, $g(x)=G(x)B(x)$

$(A(x),\ B(x)$는 서로소$)$라 하면

$$f(x)+g(x)=G(x)A(x)+G(x)B(x)$$
$$=G(x)\{A(x)+B(x)\}$$ 이므로

$f(x)+g(x)$는 $G(x)$를 인수로 갖는다.

$$f(x)+g(x)=2x^2-2x-4=2(x^2-x-2)$$
$$=2(x-2)(x+1)\cdots㉡$$

㉠, ㉡에서 $G(x)=x-2$

$\therefore\ G(2)=0$

7. x가 실수일 때, 복소수$(1+i)x^2+2(2+i)x+3-3i$를 제곱하면 음의 실수가 된다. 이 때, x의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

(준식)$=(x^2+4x+3)+(x^2+2x-3)i$

i가 순허수이어야 제곱하면 음이 된다.

$\therefore\ x^2+4x+3=0$이고 $x^2+2x-3\neq 0$

$x=-1$ 또는 $x=-3\cdots$㉠

$x\neq 1$ 그리고 $x\neq -3\cdots$㉡

㉠, ㉡에서 $x=-1$이다.

8. 등식 $(x+yi)(z-i)=10$을 만족하는 자연수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 3개

해설

$(xz+y)+(yz-x)i=10$

$xz+y=10 \cdots ㉠$, $yz-x=0 \cdots ㉡$

㉡을 ㉠에 대입

$y(z^2+1)=10$

z를 기준으로 하여 순서쌍을 구해보면

$(5, 5, 1)$, $(4, 2, 2)$, $(3, 1, 3)$ 3개

9. n이 양의 홀수일 때, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2n}+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2n}$의 값을 구하면?

① -1　② 0　③ 1　④ -2　⑤ 100

해설

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2n}=\left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2}\right\}^{n}=\left(\frac{2i}{2}\right)^{n}=i^{n}$$

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2n}=\left\{\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2}\right\}^{n}=\left(-\frac{2i}{2}\right)^{n}=(-i)^{n}$$

$\therefore$ (준식)$=i^{n}+(-i)^{n}=0$

10. $x = \dfrac{3+i}{2}$ 일 때, $p = 2x^3 - 2x^2 - 5x + 3$ 의 값을 구하면?

① $2+i$ ② $2-i$ ③ $-2+i$

④ $-4+i$ ⑤ $4+i$

해설

$x = \dfrac{3+i}{2}$ 에서 $2x - 3 = i$

$(2x-3)^2 = i^2$ 에서 $2x^2 - 6x + 5 = 0$

나눗셈 실행하여 몫과 나머지를 구하면

$2x^3 - 2x^2 - 5x + 3$

$= (2x^2 - 6x + 5)(x+2) + 2x - 7$

$= 2x - 7$

$= 2\left(\dfrac{3+i}{2}\right) - 7$

$= -4 + i$

11. 동수와 용제는 $\sqrt{-4}\sqrt{-9}$ 의 값을 아래와 같이 서로 다르게 계산하였다. 틀린 계산 과정에서 처음으로 등호가 성립하지 않는 곳을 고른 것은?

동수 : $\sqrt{-4}\sqrt{-9} \xrightarrow{㉠} \sqrt{4}i\sqrt{9}i \xrightarrow{㉡} \sqrt{36}i^2 \xrightarrow{㉢} -6$
용제 : $\sqrt{-4}\sqrt{-9} \xrightarrow{㉣} \sqrt{(-4)(-9)} \xrightarrow{㉤} \sqrt{36} \xrightarrow{㉥} 6$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉣ ⑤ ㉤

해설

$a>0$ 일 때, $\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$ 이다.
또, $a<0, b<0$ 일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ 이다.

따라서 용제가 계산한 식 ㉣ 부분에서 처음으로 잘못되었다.

12. $x^2-2x+3=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라고 할 때, $(\alpha^2-2\alpha)(\beta^2-2\beta)$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$x^2-2x+3=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=3$

$(\alpha^2-2\alpha)(\beta^2-2\beta)$

$=\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2+4\alpha\beta$

$=(\alpha\beta)^2-2\alpha\beta(\alpha+\beta)+4\alpha\beta$

$=9-6\cdot 2+12=9$

13. 이차방정식 $x^2+3x-2=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha^4+\beta^4$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 161

해설

$\alpha+\beta=-3, \alpha\beta=-2$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=13$

$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2$

$=(13)^2-2\alpha^2\beta^2$

$=(13)^2-2(-2)^2=161$

14. 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0\ (ab \neq 0)$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면 $\alpha + \beta = \alpha^2 + \beta^2 = \alpha^3 + \beta^3$이 성립한다. 이 때, $a,\ b$의 값은?

① $a = 1,\ b = 1$　② $a = 1,\ b = 2$　③ $a = -1,\ b = 2$

④ $a = 2,\ b = 1$　⑤ $a = 2,\ b = 2$

해설

$\alpha + \beta = a,\ \alpha\beta = b$

$\alpha + \beta = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$

$a = a^2 - 2b = a^3 - 3ab$

$a(a^2 - 3b) = a$

$\therefore a^2 - 3b = 1$

$a^2 - 2b = a$이므로 $a - b = 1$

$(b + 1)^2 - 3b = 1$

$b^2 - b = b(b - 1) = 0$

$ab \neq 0$이므로 $b = 1$

$\therefore a = 2, b = 1$

15. 이차방정식 $x^2-2x-2=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\beta}{\alpha}$를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차방정식을 구하면?

① $x^2-4x+1=0$　　② $x^2+4x+1=0$
③ $x^2-3x+1=0$　　④ $x^2+3x+1=0$
⑤ $x^2-2x+1=0$

해설

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-2$

$x^2-(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha})x+(\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\alpha})=0$

$x^2-(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta})x+1=0$

$x^2-\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}x+1=0$

$\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{2^2-2\cdot(-2)}{-2}=-4$

$\therefore\ x^2+4x+1=0$

16. x에 대한 이차방정식 $x^2+(m+3)x+(m+6)=0$의 두 근이 모두 양수일 때, 실수 m의 값의 범위에 속하는 정수를 구하면?

① -6　② -5　③ -4　④ -3　⑤ -2

해설

(ⅰ) (두근의 합) $-m-3>0$
$m<-3$
(ⅱ) (두근의 곱) $m+6>0$
$m>-6$
(ⅲ) $D=(m+3)^2-4(m+6)\geq 0$
$m^2+2m-15\geq 0$
$(m-3)(m+5)\geq 0$
$m\leq -5$ 또는 $m\geq 3$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $-6<m\leq -5$
$\therefore m=-5$

17. 다음 중 이차함수 $y=x^2-2(a+b)x+ab$ 의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것은? (단,a,b 는 실수)

① 항상 x 축과 만난다.

② 항상 x 축과 만나지 않는다.

③ a,b 가 양의 실수일 때, x 축과 두 점에서 만난다.

④ a,b 가 음의 실수일 때, x 축과 접한다.

⑤ a,b 가 음이 아닌 실수일 때, x 축과 만나지 않는다.

해설

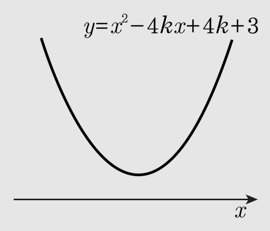
이차함수 $y=x^2-2(a+b)x+ab$ 의 그래프와
x 축과의 교점의 개수는 이차방정식 $x^2-2(a+b)x+ab=0$ 의 실근의 개수와 같다.
이차방정식 $x^2-2(a+b)x+ab=0$ 의 판별식을 D 라 하면
$\frac{D}{4}=(a+b)^2-ab=a^2+ab+b^2$
$=\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2\geq 0$ 이므로 임의의 실수 a,b 에 대하여 항상 실근을 갖는다.
따라서, 이차함수 $y=x^2-2(a+b)x+ab$ 의 그래프는 항상 x 축과 만난다.

18. 두 함수 $y = x^2 - 2kx + 4k$, $y = 2kx - 3$의 그래프에 대하여 이차함수의 그래프가 직선보다 항상 위쪽에 있도록 k의 값의 범위를 정하면?

① $-\frac{7}{9} < k < -\frac{11}{6}$ ② $-\frac{1}{4} < k < -\frac{6}{5}$ ③ $-\frac{1}{3} < k < 0$
④ $-\frac{1}{2} < k < \frac{3}{2}$ ⑤ $-\frac{1}{2} < k < \frac{7}{5}$

해설

함수 $y = x^2 - 2kx + 4k$ 의 그래프가 직선 $y = 2kx - 3$ 보다 항상 위쪽에 있으려면
$y = x^2 - 2kx + 4k > 2kx - 3$,
즉 $x^2 - 4kx + 4k + 3 > 0$ 이 항상 성립해야 한다.
이 때, 이 부등식이 항상 성립하려면 그림과 같이 $y = x^2 - 4kx + 4k + 3$ 의 그래프가 x 축보다 위쪽에 있어야 하므로



$\frac{D}{4} = 4k^2 - 4k - 3 < 0$, $(2k+1)(2k-3) < 0$
$\therefore -\frac{1}{2} < k < \frac{3}{2}$

19. 축이 $x=2$ 이고, 두 점 $(0,\ 3),\ (1,\ 6)$ 를 지나는 이차함수의 최댓값 또는 최솟값은?

① 최댓값 7　　② 최댓값 5　　③ 최솟값 7
④ 최솟값 5　　⑤ 최댓값 -7

해설

축이 $x=2$ 이므로 $y=a(x-2)^2+q$
두 점 $(0,\ 3),\ (1,\ 6)$ 을 지나므로
$3=4a+q,\ 6=a+q$
$\therefore a=-1,\ q=7$
$y=-(x-2)^2+7$
따라서 $x=2$ 일 때, 최댓값 7 을 가지며 최솟값은 없다.

20. x 축과 두 점 $(-2,\ 0)$, $(1,\ 0)$ 에서 만나고 최댓값이 9 인 포물선의 방정식은?

① $y=-4x^2+4x-8$

② $y=4x^2-4x+8$

③ $y=-4x^2+4x+8$

④ $y=-4x^2-4x+8$

⑤ x 축과 두 점 $(p,0),(q,0)$ 에서 만나는 $\overline{pq}$ 의 길이를 이등분한 점이 축의 방정식이 된다.

해설

대칭축이 두 점의 중점 $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$ 을 지나므로 꼭짓점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2},\ 9\right)$

따라서 $y=a\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+9$

$(1,\ 0)$ 을 대입하면 $0=\frac{9}{4}a+9$, $a=-4$

$\therefore\ y=-4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+9=-4x^2-4x+8$

21. x, y, z가 실수일 때, 다음 식의 최댓값을 구하여라.

$$4x-x^2-y^2-z^2+5$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$4x-x^2-y^2-z^2+5$
$=-(x^2-4x)-y^2-z^2+5$
$=-(x-2)^2-y^2-z^2+9$
$x,\ y,\ z$는 실수이므로
$(x-2)^2 \ge 0,\ y^2 \ge 0,\ z^2 \ge 0$
따라서 $4x-x^2-y^2-z^2+5$ 는
$x-2=0,\ y=0,\ z=0$일 때,
최댓값 9를 갖는다.

22. 세 변의 길이가 a, b, c인 $\triangle\mathrm{ABC}$에 대하여 $a^2-ab+b^2=(a+b-c)c$인 관계가 성립할 때, $\triangle\mathrm{ABC}$는 어떤 삼각형인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 정삼각형

해설

$a^2-ab+b^2=(a+b-c)c$에서 $a^2-ab+b^2=ac+bc-c^2$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

즉, $\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}=0$

$\therefore\ a=b=c$

따라서, $\triangle\mathrm{ABC}$는 정삼각형이다.

23. 대각선의 길이가 28이고, 모든 모서리의 길이의 합이 176인 직육면체의 겉넓이를 구하려 할 때, 다음 중에서 사용되는 식은 ?

① $(x-a)(x-b)(x-c)$
$= x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$

② $\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$
$= a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

③ $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

④ $(x+a)(x+b)(x+c)$
$= x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$

⑤ $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
$= a^3+b^3+c^3-3abc$

해설

직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를
각각 $a,\ b,\ c$라 하면 대각선의 길이는
$\sqrt{a^2+b^2+c^2} = 28$
$\therefore\ a^2+b^2+c^2 = 28^2 \cdots$ ㉠
또, 모든 모서리의 길이의 합은 176이므로
$4(a+b+c) = 176$
$\therefore\ a+b+c = 44 \cdots$ ㉡
이 때, 직육면체의 겉넓이는 $2(ab+bc+ca)$이므로
$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \cdots$ ㉢
따라서 ㉠, ㉡을 ㉢에 대입하여 겉넓이를 구하면 1152이다.

24. $x - \frac{1}{x} = 1$ 일 때, $x^5 + \frac{1}{x^5}$ 의 값은 ?

① $\pm 6\sqrt{5}$　　② $\pm 5\sqrt{5}$　　③ $\pm 3\sqrt{5}$

④ $\pm 2\sqrt{5}$　　⑤ $\pm\sqrt{5}$

해설

$x^5 + \frac{1}{x^5} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right)$ 에서

$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 = 3$ 에서

$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 5$

$\therefore\ x + \frac{1}{x} = \pm\sqrt{5}$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$
$$= \pm 5\sqrt{5} - 3(\pm\sqrt{5}) = \pm 2\sqrt{5}$$

$\therefore\ x^5 + \frac{1}{x^5} = 3(\pm 2\sqrt{5}) - (\pm\sqrt{5}) = \pm 5\sqrt{5}$

25. x에 대한 다항식 $f(x)$를 $(x-a)(x+b)$, $(x+b)(x-c)$, $(x-c)(x-a)$로 나눈 나머지가 각각 $x+2$, $-x+4$, 0일 때, 상수 a, b, c의 곱을 구하면?

① 8　　② -8　　③ 12　　④ -12　　⑤ 16

해설

$f(x)=(x-a)(x+b)P(x)+x+2\cdots$①
$\quad=(x+b)(x-c)Q(x)-x+4\cdots$②
$\quad=(x-c)(x-a)R(x)\cdots$③
나머지 정리에 의해
i) ① 에서 $f(a)=a+2$, ③ 에서
$f(a)=0$
$\Rightarrow a=-2$
ii) ① 에서 $f(-b)=-b+2$, ② 에서
$f(-b)=b+4$
$\Rightarrow b=-1$
iii) ② 에서 $f(c)=-c+4$, ③ 에서
$f(c)=0$
$\Rightarrow c=4$
$\therefore abc=8$

26. x^4-6x^2+1을 인수분해 하였더니 $(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$가 되었다. 이 때, $a+b+c+d$의 값을 구하면?

① -2 ② 2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 4

해설

$x^4-6x^2+1=(x^4-2x^2+1)-4x^2$
$=(x^2-1)^2-(2x)^2$
$=(x^2+2x-1)(x^2-2x-1)$
$=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$
$\therefore\ a+b+c+d=-2$

27. a, b, c가 $\triangle ABC$의 세변의 길이를 나타낼 때, 다음 등식 $a^3+a^2b-ab^2-a^2c+b^2c-b^3=0$을 만족하는 삼각형의 모양은?

① 직삼각형

② 이등변삼각형

③ 직각삼각형

④ 직각이등변삼각형

⑤ 이등변삼각형 또는 직각삼각형

해설

$a^3+a^2b-ab^2-a^2c+b^2c-b^3=0$

$a^2(a+b)-b^2(a+b)-c(a^2-b^2)=0$

$(a+b)(a^2-ac+bc-b^2)=0$

$(a+b)\{((a-b)(a+b)-c(a-b)\}=0$

$(a+b)(a-b)(a+b-c)=0$

$a+b>0, a+b-c>0$이므로 $a=b$

$\therefore a=b$인 이등변삼각형

28. 두 다항식 $2x^3+(a-2)x^2+ax-2a$, x^3+2x^2-x-2의 최대공약수가 이차식이 되도록 상수 a의 값을 정하여라.

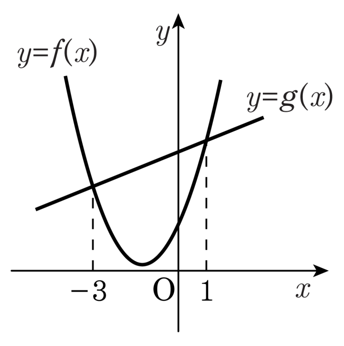
▶ 답 :

▷ 정답 : $a=-2$

해설

$x^3+2x^2-x-2=(x-1)(x+1)(x+2)$
$f(x)=2x^3+(a-2)x^2+ax-2a$라 하면
$f(1)=0$이므로 $f(x)$는 $x-1$을 인수로 갖는다.
최대공약수가 이차식이므로 $f(x)$는 $x+1$
또는 $x+2$를 인수로 가져야 한다.
$f(-2)=-8-4a-8-4a\neq 0$이므로
$x+1$이 인수이다.
$\therefore\ f(-1)=0$일 때 $a=-2$

29. 아래 그림과 같이 두 함수 $f(x) = 2x^2 + ax + 4$, $g(x) = cx + d$ 의 그래프가 $x = 1$ 과 $x = -3$ 에서 만난다. 이 때, 함수 $y = f(x) - g(x)$ 의 최솟값은?



① -8　② -6　③ -4　④ 2　⑤ 4

해설

두 함수를 연립하면,

$2x^2 + ax + 4 = cx + d$

$\Rightarrow 2x^2 + (a-c)x + 4 - d = 0 \cdots$ ㉠

근이 $-3, 1$ 이므로

$2(x+3)(x-1) = 0$ 과 일치한다.

㉠과 비교하면 $a - c = 4, d = 10$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) - g(x) &= 2x^2 + (a-c)x + 4 - d \\ &= 2x^2 + 4x - 6 \\ &= 2(x+1)^2 - 8 \end{aligned}$$

$\therefore$ 최솟값 : -8

30. 밑변의 길이와 높이의 합이 28 cm 인 삼각형의 최대 넓이는?

① $90\,\text{cm}^2$ ② $92\,\text{cm}^2$ ③ $94\,\text{cm}^2$
④ $96\,\text{cm}^2$ ⑤ $98\,\text{cm}^2$

해설

삼각형의 밑변의 길이를 $x\,\text{cm}$, 넓이를 $y\,\text{cm}^2$ 라 하면

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x(28-x) \\ &= \frac{1}{2}(-x^2+28x) \\ &= -\frac{1}{2}(x^2-28x) \\ &= -\frac{1}{2}(x-14)^2+98 \end{aligned}$$

31. 삼차방정식 $x^3 - 2x^2 - 4x + k = 0$ 의 세 근 α, β, γ 에 대하여 $(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) = \alpha\beta\gamma$를 만족할 때, k의 값을 구하면?

① 7　② 6　③ 5　④ 4　⑤ 3

해설

$\alpha + \beta + \gamma = 2,\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -4,\ \alpha\beta\gamma = -k$ 이므로
$\alpha + \beta = 2 - \gamma,\ \beta + \gamma = 2 - \alpha,\ \gamma + \alpha = 2 - \beta$
주어진 식은 $(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma) = \alpha\beta\gamma$
$\therefore\ 8 - 4(\alpha + \beta + \gamma) + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma = \alpha\beta\gamma$
$\therefore\ 8 - 8 - 8 + k = -k$
$\therefore\ k = 4$

32. $x^2 + ax + b = 0$, $x^2 + bx + a = 0$이 단 한 개의 공통근을 가진다. $-1 \le a \le 0$일 때 $a^2 + b^2$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M + m$의 값을 구하면?

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{9}{2}$

해설

공통근을 α라 하면

$\alpha^2 + a\alpha + b = 0 \cdots$①

$\alpha^2 + b\alpha + a = 0 \cdots$②

① − ② : $(a-b)(\alpha-1) = 0$에서

$a \ne b$이므로 $\alpha = 1$

$1 + a + b = 0$에서 $b = -a - 1$

$a^2 + b^2 = a^2 + (-a-1)^2 = 2a^2 + 2a + 1$

$= 2\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$

$-1 \le a \le 0$이므로 $M = 1$, $m = \frac{1}{2}$

33. 2 년 전의 A 와 B 의 임금은 서로 같았으나 그 해 A 의 임금은 8% 인상되었고, 작년에는 다시 47% 인상되었다. 반면 B 의 임금은 2 년 전과 작년의 임금 인상률이 모두 a% 로 일정했다. 두 사람의 올해 임금이 서로 같을 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

2 년 전 두 사람의 임금을 k 원이라면
올해 A 와 B 의 임금은 각각
$A : k(1+0.08)(1+0.47)$
$B : k\left(1+\frac{a}{100}\right)^2$
따라서
$(100+a)^2 = 108\times147 = 3\times3\times6\times6\times7\times7$
$\therefore\ 100+a = 126$
$\therefore a = 26$

34. 서로 다른 두 복소수 x, y 가 $x^2 - y = i$, $y^2 - x = i$ 를 만족할 때, $x^3 + y^3$ 의 값을 구하시오. (단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답:

▷ 정답: $2 - 3i$

해설

$x^2 - y = i \cdots$ ①, $y^2 - x = i \cdots$ ② 에서

① - ② 하면 : $(x+y)(x-y) + (x-y) = 0$,

$(x-y)(x+y+1) = 0$

조건에서 $x \neq y$ 이므로 $x + y = -1$ 이다.

① + ②하면 $x^2 + y^2 - x - y = 2i$

식을 변형하면 $(x+y)^2 - 2xy - (x+y) = 2i$

$\therefore\ xy = 1 - i$

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) \\ &= (-1)^3 - 3(1-i)(-1) \\ &= 2 - 3i \end{aligned}$$

35. $x+3y=1,\ x\ge 0,\ y\ge -2$ 일 때 x^2+y^2 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M+\dfrac{1}{m}$ 의 값은?

① 53 ② 58 ③ 63 ④ 68 ⑤ 72

해설

$x+3y=1$ 로부터 $x=1-3y \cdots\cdots\cdots$ ㉠
그런데 $x\ge 0$ 이므로

$x=1-3y\ge 0 \therefore\ y\le \dfrac{1}{3} \cdots\cdots\cdots$ ㉡

또 $y\ge -2 \cdots\cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢에서 $-2\le y\le \dfrac{1}{3}$

$x^2+y^2=k$ 라 하고 이 식에 ㉠을 대입하면

$$\begin{aligned}(1-3y)^2+y^2 &= 1-6y+9y^2+y^2 \quad \therefore\ 10\left(y^2-\frac{6}{10}y\right)+1=k \\ &= 10y^2-6y+1=k\end{aligned}$$

$$\rightarrow\ 10\left(y-\frac{3}{10}\right)^2-\frac{9}{10}+1=k$$

$$\rightarrow\ 10\left(y-\frac{3}{10}\right)^2+\frac{1}{10}=k$$

$$\begin{cases}\therefore\ y=\dfrac{3}{10} \text{ 일 때 } k=\dfrac{1}{10} & : \text{ 최솟값 } m \\ y=-2 \text{ 일 때 } k=53 & : \text{ 최댓값 } M \\ y=\dfrac{1}{3} \text{ 일 때 } k=\dfrac{1}{9} & \end{cases}$$

$\therefore\ M+\dfrac{1}{m}=53+10=63$