1. $4x^2 + 4y^2 - 20x + 9 = 0$의 중심의 좌표 C와 반지름 r을 구하면?

① $C\left(-\frac{5}{2},\ 0\right),\ r = 2$
② $C\left(\frac{5}{2},\ 0\right),\ r = 4$
③ $C\left(0,\ \frac{5}{2}\right),\ r = 4$
④ $C\left(\frac{5}{2},\ 0\right),\ r = 2$
⑤ $C\left(0,\ \frac{5}{2}\right),\ r = 2$

해설

$4x^2 + 4y^2 - 20x + 9 = 0$를 정리하면

$x^2 + y^2 - 5x + \frac{9}{4} = 0$

$\therefore\ \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = 4$

따라서 중심의 좌표는 $\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$이며

반지름은 2이다.

2. 지름의 양 끝점이 $(3,\ 0)$, $(5,\ 2)$인 원의 방정식이 $(x-a)^2+(y-b)^2=r$이다. $a+b+r$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

지름의 양 끝점의 중점의 원의 중심이므로,
중심의 좌표는 $(4,\ 1)$이다.
(지름의 길이) $=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$에서
반지름의 길이는 $\sqrt{2}$
따라서, 구하는 원의 방정식은
$(x-4)^2+(y-1)^2=2$

3. 직선 $2x-y+1=0$ 을 x 축의 방향으로 3 만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행 이동한 식이 $2x-y-4=0$ 이다. 이 때, a 의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$2(x-3)-(y-a)+1=0$

$2x-y-5+a=0$

$\therefore\ a=1$

4. 점 P (3, −4) 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 P′ 이라 할 때, 선분 PP′ 의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

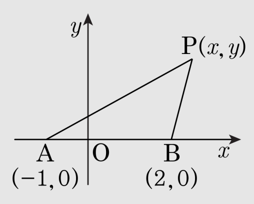
해설

점 P(3, −4) 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점
P′ 의 좌표는 (3, 4) 이므로
$\overline{PP'} = \sqrt{(3-3)^2 + (-4-4)^2} = 8$

5. 두 점 A$(-1,\ 0)$, B$(2,\ 0)$ 으로부터 거리의 비가 $2:1$ 인 점 P 의 자취는 어떤 원을 나타낸다. 이 때, 이 원의 반지름의 길이는?

① $\frac{3}{2}$　② 2　③ $\frac{5}{2}$　④ 3　⑤ 4

해설



조건을 만족시키는 점 P 의 좌표를 P(x, y) 라 하면

$\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$

$2\overline{BP} = \overline{AP}$

$\therefore\ 4\overline{BP}^2 = \overline{AP}^2$

그런데 $\overline{AP} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$

$\overline{BP} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$

$4\left\{(x-2)^2 + y^2\right\} = \left\{(x+1)^2 + y^2\right\}$

정리하면 $(x-3)^2 + y^2 = 4$

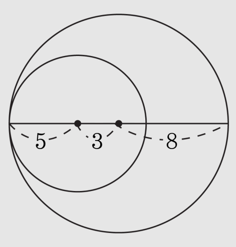
따라서 원의 반지름은 2 이다.

6. 반지름의 길이가 5 cm, 8 cm 인 두 원의 중심거리가 3 cm 일 때, 두 원의 위치관계는?

① 한 원이 다른 원의 외부에 있다.
② 두 원이 외접한다.
③ 두 원이 두 점에서 만난다.
④ 두 원이 내접한다.
⑤ 한 원이 다른 원의 내부에 있다.

해설

반지름이 5 인 원이 반지름이 8 인 원 안에 내접한다.



7. 원 $x^2+y^2=4$ 과 직선 $y=2x+k$ 가 서로 다른 두 점에서 만날 때, k 의 값의 범위는?

① $-2\sqrt{5}<k<2\sqrt{5}$　　② $-3\sqrt{5}<k<3\sqrt{5}$
③ $-4\sqrt{5}<k<4\sqrt{5}$　　④ $k<-\sqrt{5}$ 또는 $k>\sqrt{5}$
⑤ $k<-2\sqrt{5}$ 또는 $k>2\sqrt{5}$

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리 d 는

$$d=\frac{|0+0+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{5}}$$

이 때, 원의 반지름의 길이가 2 이므로
원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|k|}{\sqrt{5}}<2 \quad \therefore -2\sqrt{5}<k<2\sqrt{5}$$

8. 점 A$(-2,\ 3)$ 에서 원 $x^2+y^2-2x+4y-4=0$에 그은 접선의 접점을 B라 할 때, AB의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

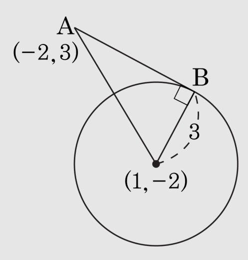
해설

$x^2+y^2-2x+4y-4=0$

$(x-1)^2+(y+2)^2=3^2$

원의 중심은 $(1,\ -2)$, 반지름은 3이므로

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(3^2+(-5)^2)-3^2} = 5$



9. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점 $P(-1, \sqrt{3})$ 에서의 접선과 직선 $y = x$ 와의 교점의 좌표는?

① $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$
② $(2\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$
③ $(4, 4)$
④ $(2\sqrt{3}+2, 2\sqrt{3}+2)$
⑤ $(2\sqrt{3}-2, 2\sqrt{3}-2)$

해설

원 $x^2 + y^2 = 4$
위의 점 $P(-1, \sqrt{3})$ 에서의 접선의 방정식은
$-x + \sqrt{3}y = 4$ 이므로 이 방정식과
$y = x$ 를 연립하면 $-x + \sqrt{3}x = 4$

$\therefore\ x = \dfrac{4}{\sqrt{3}-1} = 2\sqrt{3}+2$

따라서 구하는 교점의 좌표는
$(2\sqrt{3}+2, 2\sqrt{3}+2)$

10. 직선 $y = -3x + 2$을 다음과 같이 대칭 이동 할 때, 옳은 것을 모두 고르면?

① (x 축) : $y = 3x - 2$
② (y 축) : $y = -3x - 2$
③ (원점) : $y = 3x + 2$
④ ($y = x$) : $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$
⑤ ($y = -x$) : $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

해설

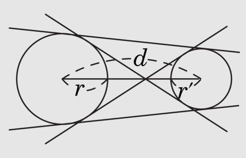
① x 축 : $y = -3x + 2 \rightarrow (-y) = -3x + 2$
$\rightarrow y = 3x - 2$ (O)
② y 축 : $y = -3x + 2 \rightarrow y = -3(-x) + 2$
$\rightarrow y = 3x + 2$ (X)
③ 원점 : $y = -3x + 2 \rightarrow (-y) = -3(-x) + 2$
$\rightarrow y = -3x - 2$ (X)
④ $y = x$: $y = -3x + 2 - \rightarrow x = -3y + 2$
$\rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ (O)
⑤ $y = -x$: $y = -3x + 2 - \rightarrow (-x) = -3(-y) + 2$
$\rightarrow y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ (X)

11. 다음 두 원 $x^2+y^2=3^2, (x-9)^2+y^2=2^2$ 의 공통접선의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ____개

▷ 정답 : 4 개

해설



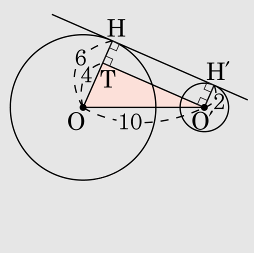
먼저 두 원의 반지름의 길이의 합 $r+r'$, 차 $r \sim r'$, 중심거리 d 를 구하여
두 원의 위치관계를 파악한다.
두 원의 반지름의 길이를 각각 $r=3, r'=2$ 로 놓으면
$r+r'=5, r \sim r'=1$ $d=9$ 이므로
$r+r'<d$ (한 원이 다른 원 밖에 있다.) $\therefore$ 공통접선은 모두 4 개

12. 다음 두 원 $x^2+y^2=36$, $(x-6)^2+(y-8)^2=4$ 의 공통외접선과 공통내접선의 길이의 합을 구하면?

① $2+\sqrt{19}$　　② $1+3\sqrt{11}$　　③ $\sqrt{13}+\sqrt{31}$

④ $6+2\sqrt{21}$　　⑤ $5+4\sqrt{51}$

해설



두 원의 반지름의 길이는 각각 6, 2 이고, 두 원의 중심을 각각 O, O′ 이라고 할 때, O (0, 0) , O′ (6, 8) 이므로 중심거리는 $\sqrt{6^2+8^2}=10$ 이다. (i) 다음 그림과 같이 점 O′ 에서 $\overline{\mathrm{OH}}$ 에 내린 수선의 발을 T 라고 하면

$\overline{\mathrm{TH}}=\overline{\mathrm{O'H'}}=2$ 이므로

$\overline{\mathrm{OT}}=6-2=4$

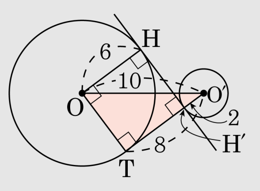
한편, $\triangle\mathrm{OTO'}$ 은 직각삼각형이므로 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{O'T}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OO'}}^2-\overline{\mathrm{OT}}^2}=\sqrt{10^2-4^2}=2\sqrt{21}$

이 때, $\overline{\mathrm{HH}}=\overline{\mathrm{O'T}}$ 이므로 구하는 공통외접선의 길이는 $2\sqrt{21}$

(ii) 다음 그림과 같이 점 O 에서 $\overline{\mathrm{O'H'}}$ 의 연장선에 내린 수선의 발을 T 라고 하면

$\overline{\mathrm{TH'}}=\overline{\mathrm{OH}}=6$ 이므로 $\overline{\mathrm{O'T}}=6+2=8$



한편, $\triangle\mathrm{OTO'}$ 은 직각삼각형이므로 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{OT}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OO'}}^2-\overline{\mathrm{O'T}}^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$

이때, $\overline{\mathrm{HH'}}=\overline{\mathrm{OT}}$ 이므로 구하는 공통내접선의 길이는 6

(i), (ii) 에서 구하는 길이의 합은 $2\sqrt{21}+6$

13. 중심이 C(1, 2)이고, 직선 L : $x+2y=0$에 접하는 원의 반지름을 r이라 할 때 r^2은 얼마인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

중심에서 접선까지의 거리가 원의 반지름과 같으므로

반지름은 $\frac{|1+4|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

∴ 구하는 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y-2)^2=5$ 이므로

$\therefore\ r^2=5$

14. 직선 $3x+4y+a=0$ 이 원 $x^2+y^2-2x+2y=2$ 에 접할 때, 양수 a 의 값을 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: $a=11$

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면
$(x-1)^2+(y+1)^2=2^2$
직선이 원에 접하므로 원의 중심
$(1,\ -1)$ 에서 직선까지의 거리가
원의 반지름의 길이2 와 같다.
따라서, $\dfrac{|3\cdot 1+4\cdot(-1)+a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$
$|a-1|=10$
$a-1=\pm 10$
$a>0$ 이므로 $a=11$

15. 원 $x^2+y^2=1$을 x축의 방향으로 2 만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행 이동하였더니 직선 $ax+y+1=0$과 접하였다. 이 때, 양수 a의 값은?

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{\sqrt{3}}{3}$　③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$　④ 1　⑤ $\sqrt{3}$

해설

원 $x^2+y^2=1$ 을
x축의 방향으로 2, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면,
$(x-2)^2+(y+1)^2=1$
이 원이 직선 $ax+y+1=0$과 접하므로
원의 중심 $(2,\ -1)$에서 직선까지의 거리는 원의 반지름의 길이와 같다.
즉, $\frac{|2a-1+1|}{\sqrt{a^2+1}}=1$ 에서 $|2a|=\sqrt{a^2+1}$,
$4a^2=a^2+1$, $a^2=\frac{1}{3}$
$\therefore\ a=\frac{\sqrt{3}}{3}$ $(\because a>0)$

16. 원 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ 위의 점에서 직선 $y=-x+4$에 이르는 최소 거리는?

① $\sqrt{2}-1$ ② $\sqrt{2}$ ③ 3
④ $\sqrt{2}+1$ ⑤ 3

해설

$x^2+y^2-2x-2y+1=0$은 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$이므로
원의 중심 $(1,1)$에서 직선 $x+y-4=0$ 까지의 거리 d는
$d=\dfrac{|1+1-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$
따라서 구하는 최소 거리는
$d-$(원의 반지름의 길이) $=\sqrt{2}-1$

17. 원 $x^2+(y-4)^2=4$가 원 $(x-4)^2+y^2=9$의 외부에 있을 때, 두 원 사이의 최단거리는?

① 2 ② 3 ③ 5
④ $4\sqrt{2}-5$ ⑤ $4\sqrt{2}-6$

해설

두 원의 중심의 좌표가 각각 $(0,4)$, $(4,0)$이므로 중심거리는 $\sqrt{4^2+(-4)^2}=4\sqrt{2}$
두 원의 반지름은 각각 2, 3이므로 두 원의 최단거리는 $4\sqrt{2}-2-3=4\sqrt{2}-5$

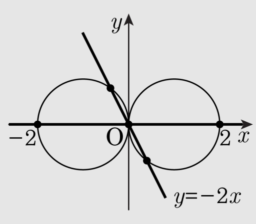
18. 이차방정식 $x^2+y^2=2|x|$과 $x^2+y^2=2|x+y|$의 공통근의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 5 개

해설

$x^2+y^2=2|x| \cdots$ ㉠
$x^2+y^2=2|x+y| \cdots$ ㉡
㉠) 과 ㉡) 에서 $2|x|=2|x+y|$
$\therefore x+y=\pm x$
$\therefore y=0$ 또는 $y=-2x \cdots$ ㉢
㉠과 ㉢의 교점의 개수는 다음 그림에서 5 개이다.
실제로, 교점을 구하면
$(0,\ 0)$, $(\pm 2,\ 0)$,
$\left(\pm\frac{2}{5},\ \mp\frac{4}{5}\right)$
(복부호동순)



19. 점$(-1,\ 4)$ 를 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 에 대하여 대칭이동한 점이 $(5,\ 2)$ 일 때, ab 의 값은?

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

해설

점 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 가 두 점 $(-1,\ 4)$, $(5,\ 2)$ 를 이은 선분의 중점이므로

$(a,\ b) = \left(\dfrac{-1+5}{2},\ \dfrac{4+2}{2}\right) = (2,\ 3)$

$\therefore\ a = 2,\ b = 3 \therefore\ ab = 6$

20. P (3, 1)을 직선 $x+y+1=0$ 에 대하여 대칭이동한 점을 Q $(\alpha,\ \beta)$ 라 할 때 $\alpha+\beta$ 의 값은?

① 1　　② -2　　③ -4　　④ -6　　⑤ -8

해설

직선 PQ 가 $x+y+1=0$ 에 수직이므로
기울기는 1 이다.

$\frac{\beta-1}{\alpha-3}=1\cdots$ ㉠

점 P, Q 의 중점 $\left(\frac{\alpha+3}{2},\ \frac{\beta+1}{2}\right)$ 이 직선
$x+y+1=0$ 위 에 있으므로

$\frac{\alpha+3}{2}+\frac{\beta+1}{2}+1=0\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha=-2,\ \beta=-4$
따라서 $\alpha+\beta=-6$ 이다.