

1. $4x^2 + 4y^2 - 20x + 9 = 0$ 의 중심의 좌표 C 와 반지름 r 을 구하면?

① $C\left(-\frac{5}{2}, 0\right), r = 2$

② $C\left(\frac{5}{2}, 0\right), r = 4$

③ $C\left(0, \frac{5}{2}\right), r = 4$

④ $C\left(\frac{5}{2}, 0\right), r = 2$

⑤ $C\left(0, \frac{5}{2}\right), r = 2$

해설

$4x^2 + 4y^2 - 20x + 9 = 0$ 를 정리하면

$$x^2 + y^2 - 5x + \frac{9}{4} = 0$$

$$\therefore \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = 4$$

따라서 중심의 좌표는 $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ 이며

반지름은 2이다.

2. 지름의 양 끝점이 $(3, 0)$, $(5, 2)$ 인 원의 방정식이 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r$ 이다. $a + b + r$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

지름의 양 끝점의 중점의 원의 중심이므로,
중심의 좌표는 $(4, 1)$ 이다.

(지름의 길이) $= \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ 에서

반지름의 길이는 $\sqrt{2}$

따라서, 구하는 원의 방정식은

$$(x-4)^2 + (y-1)^2 = 2$$

3. 직선 $2x - y + 1 = 0$ 을 x 축의 방향으로 3 만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행 이동한 식이 $2x - y - 4 = 0$ 이다. 이 때, a 의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$2(x - 3) - (y - a) + 1 = 0$$

$$2x - y - 5 + a = 0$$

$$\therefore a = 1$$

4. 점 P (3, -4)를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 P' 이라 할 때, 선분 PP' 의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

점 P(3, -4) 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점 P' 의 좌표는 (3, 4) 이므로

$$\overline{PP'} = \sqrt{(3-3)^2 + (-4-4)^2} = 8$$

5. 두 점 A(-1, 0), B(2, 0) 으로부터 거리의 비가 2 : 1 인 점 P 의 자취는 어떤 원을 나타낸다. 이 때, 이 원의 반지름의 길이는?

① $\frac{3}{2}$

② 2

③ $\frac{5}{2}$

④ 3

⑤ 4

해설

조건을 만족시키는 점 P 의 좌표를 $P(x, y)$ 라 하면

$$\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$$

$$2\overline{BP} = \overline{AP}$$

$$\therefore 4\overline{BP}^2 = \overline{AP}^2$$

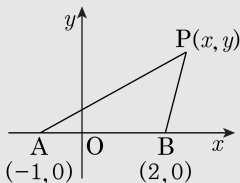
$$\text{그런데 } \overline{AP} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$$

$$\overline{BP} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$$

$$4\{(x-2)^2 + y^2\} = \{(x+1)^2 + y^2\}$$

$$\text{정리하면 } (x-3)^2 + y^2 = 4$$

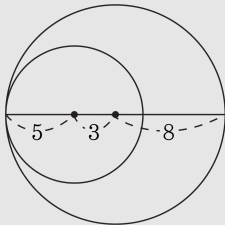
따라서 원의 반지름은 2 이다.



6. 반지름의 길이가 5cm, 8cm 인 두 원의 중심거리가 3cm 일 때, 두 원의 위치관계는?
- ① 한 원이 다른 원의 외부에 있다.
 - ② 두 원이 외접한다.
 - ③ 두 원이 두 점에서 만난다.
 - ④ 두 원이 내접한다.
 - ⑤ 한 원이 다른 원의 내부에 있다.

해설

반지름이 5인 원이 반지름이 8인 원 안에 내접한다.



7. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 과 직선 $y = 2x + k$ 가 서로 다른 두 점에서 만날 때, k 의 값의 범위는?

① $-2\sqrt{5} < k < 2\sqrt{5}$

② $-3\sqrt{5} < k < 3\sqrt{5}$

③ $-4\sqrt{5} < k < 4\sqrt{5}$

④ $k < -\sqrt{5}$ 또는 $k > \sqrt{5}$

⑤ $k < -2\sqrt{5}$ 또는 $k > 2\sqrt{5}$

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리 d 는

$$d = \frac{|0 + 0 + k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{5}}$$

이 때, 원의 반지름의 길이가 2 이므로

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|k|}{\sqrt{5}} < 2 \quad \therefore -2\sqrt{5} < k < 2\sqrt{5}$$

8. 점 $A(-2, 3)$ 에서 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 에 그은 접선의 접점을 B 라 할 때, AB 의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

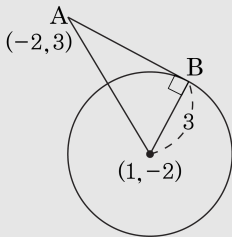
해설

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 3^2$$

원의 중심은 $(1, -2)$, 반지름은 3 이므로

$$\overline{AB} = \sqrt{(3^2 + (-5)^2) - 3^2} = 5$$



9. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점 $P(-1, \sqrt{3})$ 에서의 접선과 직선 $y = x$ 와의 교점의 좌표는?

① $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$

② $(2\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$

③ $(4, 4)$

④ $(2\sqrt{3} + 2, 2\sqrt{3} + 2)$

⑤ $(2\sqrt{3} - 2, 2\sqrt{3} - 2)$

해설

원 $x^2 + y^2 = 4$

위의 점 $P(-1, \sqrt{3})$ 에서의 접선의 방정식은

$-x + \sqrt{3}y = 4$ 이므로 이 방정식과

$y = x$ 를 연립하면 $-x + \sqrt{3}x = 4$

$$\therefore x = \frac{4}{\sqrt{3} - 1} = 2\sqrt{3} + 2$$

따라서 구하는 교점의 좌표는

$$(2\sqrt{3} + 2, 2\sqrt{3} + 2)$$

10. 직선 $y = -3x + 2$ 을 다음과 같이 대칭 이동 할 때, 옳은 것을 모두 고르면?

① (x 축) : $y = 3x - 2$

② (y 축) : $y = -3x - 2$

③ (원점) : $y = 3x + 2$

④ ($y = x$) : $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

⑤ ($y = -x$) : $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

해설

① x 축 : $y = -3x + 2 \rightarrow (-y) = -3x + 2$

$\rightarrow y = 3x - 2$ (O)

② y 축 : $y = -3x + 2 \rightarrow y = -3(-x) + 2$

$\rightarrow y = 3x + 2$ (X)

③ 원점 : $y = -3x + 2 \rightarrow (-y) = -3(-x) + 2$

$\rightarrow y = -3x - 2$ (X)

④ $y = x$: $y = -3x + 2 \rightarrow x = -3y + 2$

$\rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ (O)

⑤ $y = -x$: $y = -3x + 2 \rightarrow (-x) = -3(-y) + 2$

$\rightarrow y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ (X)

11. 다음 두 원 $x^2 + y^2 = 3^2, (x-9)^2 + y^2 = 2^2$ 의 공통접선의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 4개

해설

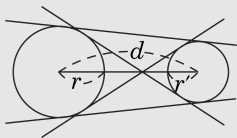
먼저 두 원의 반지름의 길이의
합 $r + r'$, 차 $r - r'$, 중심거리 d 를 구하
여

두 원의 위치관계를 파악한다.

두 원의 반지름의 길이를 각각 $r = 3, r' = 2$ 로 놓으면

$r + r' = 5, r - r' = 1, d = 9$ 이므로

$r + r' < d$ (한 원이 다른 원 밖에 있다.) $\therefore$ 공통접선은 모두
4 개



12. 다음 두 원 $x^2 + y^2 = 36$, $(x-6)^2 + (y-8)^2 = 4$ 의 공통외접선과 공통내접선의 길이의 합을 구하면?

① $2 + \sqrt{19}$

② $1 + 3\sqrt{11}$

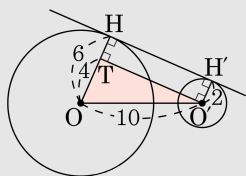
③ $\sqrt{13} + \sqrt{31}$

④ $6 + 2\sqrt{21}$

⑤ $5 + 4\sqrt{51}$

해설

두 원의 반지름의 길이는 각각 6, 2 이고,
두 원의 중심을 각각 O, O' 이라고 할 때,
 $O(0,0), O'(6,8)$ 이므로 중심거리는
 $\sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ 이다. (i) 다음 그림
과 같이 점 O' 에서 $\overline{OH}$ 에 내린 수선의
발을 T 라고 하면



$$\overline{TH} = \overline{O'H'} = 2 \text{ 이므로}$$

$$\overline{OT} = 6 - 2 = 4$$

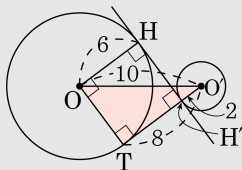
한편, $\triangle OTO'$ 은 직각삼각형이므로
피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{O'T} = \sqrt{\overline{OO'}^2 - \overline{OT}^2} = \sqrt{10^2 - 4^2} = 2\sqrt{21}$$

이 때, $\overline{HH'} = \overline{O'T}$ 이므로 구하는 공통외접선의 길이는 $2\sqrt{21}$

(ii) 다음 그림과 같이 점 O 에서 $\overline{O'H'}$ 의 연장선에 내린 수선의
발을 T 라고 하면

$$\overline{TH'} = \overline{OH} = 6 \text{ 이므로 } \overline{OT} = 6 + 2 = 8$$



한편, $\triangle OTO'$ 은 직각삼각형이므로 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{OT} = \sqrt{\overline{OO'}^2 - \overline{O'T}^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$$

이때, $\overline{HH'} = \overline{OT}$ 이므로 구하는 공통내접선의 길이는 6

(i), (ii) 에서 구하는 길이의 합은 $2\sqrt{21} + 6$

13. 중심이 $C(1, 2)$ 이고, 직선 $L : x + 2y = 0$ 에 접하는 원의 반지름을 r 이라 할 때 r^2 은 얼마인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

중심에서 접선까지의 거리가 원의 반지름과 같으므로

$$\text{반지름은 } \frac{|1 + 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

∴ 구하는 원의 방정식은

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5 \text{ 이므로}$$

$$\therefore r^2 = 5$$

14. 직선 $3x + 4y + a = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2$ 에 접할 때, 양수 a 의 값을 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: $a = 11$

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2^2$$

직선이 원에 접하므로 원의 중심

$(1, -1)$ 에서 직선까지의 거리가

원의 반지름의 길이 2 와 같다.

$$\text{따라서, } \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$$

$$|a - 1| = 10$$

$$a - 1 = \pm 10$$

$$a > 0 \text{ 이므로 } a = 11$$

15. 원 $x^2 + y^2 = 1$ 을 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행 이동하였더니 직선 $ax + y + 1 = 0$ 과 접하였다. 이 때, 양수 a 의 값은?

① $\frac{1}{2}$

② $\frac{\sqrt{3}}{3}$

③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

④ 1

⑤ $\sqrt{3}$

해설

원 $x^2 + y^2 = 1$ 을

x 축의 방향으로 2, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하면,

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 1$$

이 원이 직선 $ax + y + 1 = 0$ 과 접하므로

원의 중심 (2, -1)에서 직선까지의 거리는 원의 반지름의 길이와 같다.

$$\text{즉, } \frac{|2a - 1 + 1|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 1 \text{ 에서 } |2a| = \sqrt{a^2 + 1},$$

$$4a^2 = a^2 + 1, a^2 = \frac{1}{3}$$

$$\therefore a = \frac{\sqrt{3}}{3} (\because a > 0)$$

16. 원 $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ 위의 점에서 직선 $y = -x + 4$ 에 이르는 최소 거리는?

① $\sqrt{2} - 1$

② $\sqrt{2}$

③ 3

④ $\sqrt{2} + 1$

⑤ 3

해설

$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ 은 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 이므로
원의 중심 $(1, 1)$ 에서 직선 $x + y - 4 = 0$ 까지의 거리 d 는

$$d = \frac{|1 + 1 - 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2}$$

따라서 구하는 최소 거리는

$$d - (\text{원의 반지름의 길이}) = \sqrt{2} - 1$$

17. 원 $x^2 + (y - 4)^2 = 4$ 가 원 $(x - 4)^2 + y^2 = 9$ 의 외부에 있을 때, 두 원 사이의 최단거리는?

① 2

② 3

③ 5

④ $4\sqrt{2} - 5$

⑤ $4\sqrt{2} - 6$

해설

두 원의 중심의 좌표가 각각 $(0, 4)$, $(4, 0)$ 이므로 중심거리는

$$\sqrt{4^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2}$$

두 원의 반지름은 각각 2, 3 이므로 두 원의 최단거리는 $4\sqrt{2} -$

$$2 - 3 = 4\sqrt{2} - 5$$

18. 이차방정식 $x^2 + y^2 = 2|x|$ 과 $x^2 + y^2 = 2|x+y|$ 의 공통근의 개수를 구하여라.



답 :

개



정답 : 5 개

해설

$$x^2 + y^2 = 2|x| \cdots \textcircled{㉠}$$

$$x^2 + y^2 = 2|x+y| \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} \text{과 } \textcircled{㉡} \text{에서 } 2|x| = 2|x+y|$$

$$\therefore x+y = \pm x$$

$$\therefore y = 0 \text{ 또는 } y = -2x \cdots \textcircled{㉢}$$

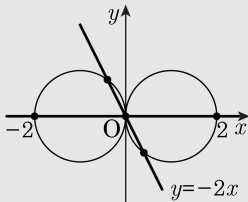
$\textcircled{㉠}$ 과 $\textcircled{㉢}$ 의 교점의 개수는 다음 그림에서 5개이다.

실제로, 교점을 구하면

$$(0, 0), (\pm 2, 0),$$

$$\left(\pm \frac{2}{5}, \mp \frac{4}{5} \right)$$

(복부호동순)



19. 점 $(-1, 4)$ 를 점 $P(a, b)$ 에 대하여 대칭이동한 점이 $(5, 2)$ 일 때, ab 의 값은?

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

점 $P(a, b)$ 가 두 점 $(-1, 4)$, $(5, 2)$ 를 이은 선분의 중점이므로

$$(a, b) = \left(\frac{-1+5}{2}, \frac{4+2}{2} \right) = (2, 3)$$

$$\therefore a = 2, b = 3 \therefore ab = 6$$

20. P (3, 1) 을 직선 $x + y + 1 = 0$ 에 대하여 대칭이동한 점을 Q (α , β) 라 할 때 $\alpha + \beta$ 의 값은?

① 1

② -2

③ -4

④ -6

⑤ -8

해설

직선 PQ 가 $x + y + 1 = 0$ 에 수직이므로
기울기는 1 이다.

$$\frac{\beta - 1}{\alpha - 3} = 1 \cdots \textcircled{㉠}$$

점 P, Q 의 중점 $\left(\frac{\alpha + 3}{2}, \frac{\beta + 1}{2}\right)$ 이 직선

$x + y + 1 = 0$ 위 에 있으므로

$$\frac{\alpha + 3}{2} + \frac{\beta + 1}{2} + 1 = 0 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha = -2$, $\beta = -4$
따라서 $\alpha + \beta = -6$ 이다.