1. 세 다항식 $A = x^2 + 3x - 2,\ B = 3x^2 - 2x + 1,\ C = 4x^2 + 2x - 3$ 에 대하여
$3A - \{5A - (3B - 4C)\} + 2B$를 간단히 하면?

① $3x^2 + 12x - 13$
② $-3x^2 + 24x + 21$
③ $3x^2 - 12x + 21$
④ $-3x^2 - 24x + 21$
⑤ $x^2 + 12x + 11$

해설

$3A - \{5A - (3B - 4C)\} + 2B$
$= -2A + 5B - 4C$
$= -2(x^2 + 3x - 2) + 5(3x^2 - 2x + 1) - 4(4x^2 + 2x - 3)$
$= -3x^2 - 24x + 21$

2. 두 다항식 $A = a + 2b$, $B = 2a + 3b$일 때, $2A + B$를 구하는 과정에서 사용된 연산법칙 중 옳지 않은 것을 골라라.

$$\begin{aligned} 2A + B &= 2(a+2b) + (2a+3b) \\ &= (2a+4b) + (2a+3b) && \text{㉠ 분배법칙} \\ &= 2a + (4b+2a) + 3b && \text{㉡ 결합법칙} \\ &= 2a + (2a+4b) + 3b && \text{㉢ 교환법칙} \\ &= (2a+2a) + (4b+3b) && \text{㉣ 교환법칙} \\ &= (2+2)a + (4+3)b && \text{㉤ 분배법칙} \\ &= 4a + 7b \end{aligned}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉣

해설

㉣ $2a + (2a+4b) + 3b = (2a+2a) + (4b+3b)$: 결합법칙

3. 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라고 할 때, $xf(x)-3$을 $x+1$로 나눈 몫과 나머지는?

① $xQ(x), -R-3$
② $xQ(x), -R+3$
③ $xQ(x), -R-6$
④ $xQ(x)+R, -R-3$
⑤ $xQ(x)+R, -R+3$

해설

$$
\begin{aligned}
& f(x) = (x+1)Q(x) + R \\
& \therefore\ xf(x) = x(x+1)Q(x) + xR \\
& \therefore\ xf(x) - 3 = x(x+1)Q(x) + xR - 3 \\
& \qquad = (x+1)\{xQ(x)\} + (x+1)R - R - 3 \\
& \qquad = (x+1)\{xQ(x) + R\} - R - 3
\end{aligned}
$$

4. $2x^4-x^3+2x^2+a$를 x^2+x+1로 나누어 떨어지도록 하는 상수 a의 값을 구하면?

① -3　② 3　③ -6　④ 6　⑤ 12

해설

직접 나누어 본다.
$\therefore a-3=0, a=3$

해설

$x^2+x+1=0$이 되는 x값을 대입한다.
$x^2+x+1=0$에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$, $x^3-1=0$
$\therefore x^3=1$
준 식의 좌변에 $x^3=1$, $x^2=-x-1$을 대입하면
$2x-1+2(-x-1)+a=0$, $a-3=0$
$\therefore\ a=3$

5. 사차식 $3x^4-5x^2+4x-7$을 이차식 A로 나누었더니 몫이 x^2-2이고 나머지가 $4x-5$일 때, 이차식 A를 구하면?

① $3x^2-2$ ② $3x^2-1$ ③ $3x^2$

④ $3x^2+1$ ⑤ $3x^2+2$

해설

검산식 : $3x^4-5x^2+4x-7=A(x^2-2)+4x-5$

$A=\dfrac{3x^4-5x^2-2}{x^2-2}=3x^2+1$

6. x 에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+2 를 x^2-x+1 로 나눈 나머지가 $x+3$ 이 되도록 $a,\ b$ 의 값을 정할 때, ab 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab=-6$

해설

검산식을 사용

$x^3+ax^2+bx+2=(x^2-x+1)\cdot A+(x+3)$

$A=(x+p)$

$x^3+ax^2+bx+2-(x+3)=(x^2-x+1)(x+p)$

$x^3+ax^2+(b-1)x-1=(x^2-x+1)(x-1)\ \ \therefore p=-1$

우변을 정리하면

$\therefore\ a=-2,\ b=3$

$\therefore ab=-6$

7. 다항식 $A = 2x^3 - 7x^2 - 4$ 를 다항식 B 로 나눌 때, 몫이 $2x - 1$, 나머지가 $-7x - 2$ 이다. 다항식 $B = ax^2 + bx + c$ 일 때, $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값은?

① 3　　② 6　　③ 9　　④ 14　　⑤ 17

해설

$A = 2x^3 - 7x^2 - 4 = B(2x - 1) - 7x - 2$ 이다.

$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = B(2x - 1)$

좌변을 $2x - 1$ 로 나누면

$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = (2x - 1)(x^2 - 3x + 2)$

$\therefore\ B = x^2 - 3x + 2$

8. $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2$ 이고 $ab \neq 0$ 일 때, 다음 중 성립하는 것을 고르면? (단, 문자는 모두 실수이다.)

① $ax+by=0$ ② $a+b=x+y$ ③ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

④ $x=y$ ⑤ $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$

해설

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2=0$ 을

간단히 정리하면

$a^2y^2+b^2x^2-2abxy=0$

즉, $(ay-bx)^2=0$

$\therefore\ ay-bx=0(\because\ a,\ x,\ b,\ y$ 는 실수)

따라서, $ay=bx$ 에서 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$

9. $x+y+z=1$, $xy+yz+zx=2$, $xyz=3$ 일 때, $(x+y)(y+z)(z+x)$의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x+y+z=1$에서
$x+y=1-z$
$y+z=1-x$
$z+x=1-y$
$(x+y)(y+z)(z+x)=(1-z)(1-x)(1-y)$
$=1-(x+y+z)+(xy+yz+zx)-xyz$
$=1-1+2-3=-1$

10. 다음 중 식의 전개가 바르지 않은 것을 고르면?

① $(1-x)(1+x+x^2)=1-x^3$

② $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)=x^4+x^2y^2+y^4$

③ $(x-3)(x-2)(x+1)(x+2)=x^4-8x^2+12$

④ $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)=a^8-b^8$

⑤ $(a+b-c)(a-b+c)=a^2-b^2-c^2+2bc$

해설

$(x-3)(x-2)(x+1)(x+2)$
$=(x^2-x-6)(x^2-x-2)$
$x^2-x=Y$라 놓자.

$$\begin{aligned}(Y-6)(Y-2) &= Y^2-8Y+12\\ &=(x^2-x)^2-8(x^2-x)+12\\ &=x^4-2x^3-7x^2+8x+12\end{aligned}$$

11. $P = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ 의 값을 구하면?

① $2^{32}-1$　　② $2^{32}+1$　　③ $2^{31}-1$

④ $2^{31}+1$　　⑤ $2^{17}-1$

해설

주어진 식에 $(2-1)=1$ 을 곱해도 식은 성립하므로

$$
\begin{aligned}
P &= (2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1) \\
&= (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{1}6+1) \\
&= (2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1) \\
&= \quad \vdots \\
&= (2^{16}-1)(2^{16}+1) \\
&= 2^{32}-1
\end{aligned}
$$

12. 두 다항식 $(1+x+x^2+x^3)^3$, $(1+x+x^2+x^3+x^4)^3$의 x^3의 계수를 각각 a, b라 할 때, $a-b$의 값은?

① 4^3-5^3　　② 3^3-3^4　　③ 0

④ 1　　⑤ -1

해설

두 다항식이 $1+x+x^2+x^3$을 포함하고 있으므로 $1+x+x^2+x^3=A$라 놓으면

$(1+x+x^2+x^3+x^4)^3$

$=(A+x^4)^3$

$=A^3+3A^2x^4+3Ax^8+x^{12}$

$=A^3+(3A^2+3Ax^4+x^8)x^4$

이 때 $(3A^2+3Ax^4+x^8)x^4$은 x^3항을 포함하고 있지 않으므로 두 다항식의 x^3의 계수는 같다.

$\therefore\ a-b=0$

13. $(10^5+2)^3$ 의 각 자리의 숫자의 합을 구하여라.

① 15　② 18　③ 21　④ 26　⑤ 28

해설

준식을 전개하면

$10^{15}+2^3+3\times2\times10^5(10^5+2)$

$=10^{15}+2^3+6\times10^{10}+12\times10^5$

$=10^{15}+10^{10}\times6+10^5\times12+8$

$\therefore\ 1+6+1+2+8=18$

14. 세 실수 a, b, c 에 대하여 $a+b+c=2$, $a^2+b^2+c^2=6$, $abc=-1$ 일 때, $a^3+b^3+c^3$ 의 값은?

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

해설

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^3+2(ab+bc+ca)$

$ab+bc+ca=-1$

$a^3+b^3+c^3$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$=2\times(6-(-1))-3=11$

15. 모든 모서리의 합이 36, 겉넓이가 56인 직육면체의 대각선의 길이는?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

직육면체의 가로, 세로, 높이를 각각 $a,\ b,\ c$라 하자.

$4(a+b+c)=36,\ 2(ab+bc+ca)=56$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$a^2+b^2+c^2=81-56=25$

$\therefore$ (대각선의 길이) $=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$=\sqrt{25}=5$

16. 다음 중에서 겉넓이가 22, 모든 모서리의 길이의 합이 24 인 직육면체의 대각선의 길이는?

① $\sqrt{11}$ ② $\sqrt{12}$

③ $\sqrt{13}$ ④ $\sqrt{14}$

⑤ 유일하지 않다.

해설

겉넓이 : $2xy + 2xz + 2yz = 22$
모서리 : $4x + 4y + 4z = 24$
대각선 : $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$ $\quad \therefore\ d = \sqrt{14}$
$= (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx)$
$= 6^2 - 22 = 14$

17. $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+a$가 이차식의 완전제곱이 되도록 a의 값을 정하면?

① 4 ② 8 ③ 12 ④ 15 ⑤ 16

해설

(준식)$=(x^2-8x+7)(x^2-8x+15)+a$
여기서, $x^2-8x+7=X$로 놓으면
(준식) $=X(X+8)+a$
$=X^2+8X+a=(X+4)^2+a-16$
따라서 $a=16$

18. 삼각형의 세 변의 길이 $a,\ b,\ c$ 에 대하여 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$ 이 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 직각삼각형　② 이등변삼각형

③ 정삼각형　④ 직각이등변삼각형

⑤ 둔각삼각형

해설

$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$ 에서 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)=0$

$\frac{1}{2}(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2)=0$

$\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}=0$ 이고,

$a,\ b,\ c$ 는 실수이므로, $a-b=0,\ b-c=0,\ c-a=0$

$\therefore\ a=b=c$

따라서, 주어진 삼각형은 정삼각형이다.

19. $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$ 이고 $abc=1$ 일 때, $(a^3+b^3+c^3)^2$ 의 값을 계산하면?

① 1　② 4　③ 9　④ 16　⑤ 25

해설

$a^3+b^3+c^3$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$
$=(a+b+c)\times 0+3abc=0+3\cdot(1)=3$
$\therefore (a^3+b^3+c^3)^2=9$

해설

$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$ $a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)=0$
$\frac{1}{2}(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$
$\therefore a=b=c \to abc=a^3=b^3=c^3=1$
$(a^3+b^3+c^3)^2=(1+1+1)^2=9$

20. 두 실수 x, y에 대하여 $x^2+y^2=7$, $x+y=3$ 일 때, x^5+y^5 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 123

해설

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$ 에서 $3^2=7+2xy$, $xy=1$
$(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$ 에서 $x^3+y^3=18$

$$\begin{aligned} x^5+y^5 &= (x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y) \\ &= 7\times18-1^2\times3 \\ &= 123 \end{aligned}$$