

1. $x^4 - 5x^2 - 14 = 0$ 의 두 허근을 α, β 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값을 구하면?

- ① 4 ② -4 ③ 8 ④ -8 ⑤ -16

해설

$$x^4 - 5x^2 - 14 = (x^2 + 2)(x^2 - 7) = 0 \text{이므로}$$

두 허근 α, β 는

각각 $\sqrt{2}i, -\sqrt{2}i$ 이므로

$$\alpha^2 + \beta^2 = -2 - 2 = -4$$

2. $x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, $\omega^3 + \bar{\omega}^3$ 의 값을 구하면? (단, $\bar{\omega}$ 는 ω 의 켈레복소수이다.)

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$x = 1 \text{ 또는 } x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \text{를 } \omega \text{라 하면}$$

$$\bar{\omega} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

$$\therefore \omega^3 = 1, \bar{\omega}^3 = 1, \omega^3 + \bar{\omega}^3 = 2$$

3. 사차방정식 $x^4 - 2x^3 + x^2 - 4 = 0$ 의 서로 다른 두 허근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

-1

1

-2

1

0

-4

-1

3

-4

4

2

1

-3

4

-4

0

2

-2

4

1

-1

2

0

$(x+1)(x-2)(x^2-x+2)=0$

따라서 두 허근은 $x^2-x+2=0$ 의 근

허근의 합은 근과 계수와의 관계에 의해 $\alpha+\beta=1$

4. 다음 사차방정식을 풀 때 근이 아닌 것을 구하면?

$$(x^2 - 2x)^2 - 6(x^2 - 2x) - 16 = 0$$

- ① 4 ② -4 ③ -2 ④ $1 + i$ ⑤ $1 - i$

해설

$x^2 - 2x = X$ 로 놓으면 주어진 방정식은
 $X^2 - 6X - 16 = 0, (X - 8)(X + 2) = 0$
 $\therefore x = 8$ 또는 $X = -2$
(i) $X = 8$ 일 때 $x^2 - 2x = 8$ 에서 $(x - 4)(x + 2) = 0$
 $\therefore x = 4$ 또는 $x = -2$
(ii) $X = -2$ 일 때 $x^2 - 2x = -2$ 에서 $x^2 - 2x + 2 = 0$
 $\therefore x = 1 \pm i$
따라서 (i), (ii) 에서 $x = 4$ 또는 $x = -2$ 또는 $x = 1 \pm i$

5. 다음 방정식의 모든 해의 곱을 구하여라.

$$(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 2) - 3 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 2) - 3 = 0$ 에서
 $x^2 - 2x = t$ 로 놓으면
 $t(t - 2) - 3 = 0,$
 $t^2 - 2t - 3 = 0$
 $(t - 3)(t + 1) = 0$
 $\therefore t = 3$ 또는 $t = -1$
(i) $t = 3$, 즉 $x^2 - 2x = 3$ 일 때
 $x^2 - 2x - 3 = 0$
 $(x - 3)(x + 1) = 0$
 $\therefore x = -1$ 또는 $x = 3$
(ii) $t = -1$, 즉 $x^2 - 2x = -1$ 일 때
 $x^2 - 2x + 1 = 0$
 $(x - 1)^2 = 0$
 $\therefore x = 1$ (중근)
따라서, $-1 \times 3 \times 1 = -3$

6. 방정식 $(x^2 + 2)^2 - 6x^2 - 7 = 0$ 의 두 실근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$(x^2 + 2)^2 - 6x^2 - 7 = 0$ 에서
 $x^4 + 4x^2 + 4 - 6x^2 - 7 = 0$
 $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$
 $x^2 = t$ 로 치환하면
 $t^2 - 2t - 3 = 0, (t - 3)(t + 1) = 0$
 $\therefore t = 3$ 또는 $t = -1$
(i) $x^2 = 3$ 일 때, $x = \pm\sqrt{3}$
(ii) $x^2 = -1$ 일 때, $x = \pm i$
(i), (ii)에서 실근의 합을 구하면
 $\sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = 0$

7. 삼차방정식 $x^3 + x^2 - (k+2)x + k = 0$ 이 중근을 가질 때, k 의 값을 구하면?

① -1 ② 0 ③ -1, 3 ④ 0, 3 ⑤ 3

해설

$x^3 + x^2 - (k+2)x + k = 0$, $(x-1)(x^2 + 2x - k) = 0$ 이 중근을 가지려면

i) $x = 1$ 이 중근일 때,

$$1 + 2 - k = 0$$

$$\therefore k = 3$$

ii) $x^2 + 2x - k = 0$ 이 중근이면

$$\frac{D}{4} = 1 + k = 0$$

$$\therefore k = -1$$

8. $1 - \sqrt{2}$ 가 방정식 $2x^2 + px + q = 0$ 의 해이고 유리수 p, q 가 $x^3 + ax^2 + 2x + b = 0$ 의 해 일 때 b 의 값은?

① 2 ② -2 ③ 4 ④ -6 ⑤ -8

해설

유리수 계수의 이차방정식이므로 한 근이 $1 - \sqrt{2}$ 이면
다른 한 근은 $1 + \sqrt{2}$ 이다.
두 근의 합은 2
두 근의 곱은 -1
 $\therefore p = -4, \quad q = -2$ ($\because$ 근과 계수의 관계를 이용)
 $p = -4, \quad q = -2$ 을 주어진 삼차방정식에 대입하면
 $-64 + 16a - 8 + b = 0, \quad -8 + 4a - 4 + b = 0$ 연립하여 풀면
 $a = 5, \quad b = -8$

9. 삼차방정식 $x^3 + x^2 + 2x - 3 = 0$ 의 세 근 α, β, γ 에 대하여 $\alpha + \beta + \gamma, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha, \alpha\beta\gamma$ 를 세 근으로 갖는 삼차방정식이 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 일 때, $a - 2b + c$ 의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$x^3 + x^2 + 2x - 3 = 0$ 의 세 근이 α, β, γ 라 하면

$\alpha + \beta + \gamma = -1, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2, \alpha\beta\gamma = 3$

구하려는 방정식의 세 근의 합

$-1 + 2 + 3 = 4 \quad \therefore a = -4$

$(-1) \times 2 + 2 \times 3 + (-1) \times 3 = -2 + 6 - 3 = 1 \quad \therefore b = 1$

세 근의 곱 $(-1) \times 2 \times 3 = -6 \quad \therefore c = 6$

$\therefore a - 2b + c = -4 - 2 + 6 = 0$

10. 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx - 3 = 0$ 의 한 근이 $1 + \sqrt{2}i$ 일 때, 두 실수 a, b 의 곱 ab 는? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 10 ② 5 ③ 0 ④ -10 ⑤ -15

해설

계수가 실수이므로 주어진 방정식의 다른 허근은 $1 - \sqrt{2}i$ 이다.
이때, 또 다른 한 근을 α 라고 하면 삼차방정식의 근과 계수와의
관계에서

$$(1 - \sqrt{2}i)(1 + \sqrt{2}i)\alpha = 3 \cdots \cdots \textcircled{A}$$

$$(1 - \sqrt{2}i) + (1 + \sqrt{2}i) + \alpha = -a \cdots \cdots \textcircled{B}$$

$$(1 - \sqrt{2}i)(1 + \sqrt{2}i) + (1 - \sqrt{2}i)\alpha + (1 + \sqrt{2}i)\alpha = b \cdots \cdots \textcircled{C}$$

$$\textcircled{A} \text{에서 } 3\alpha = 3$$

$$\therefore \alpha = 1$$

$$\textcircled{B} \text{에서 } 2 + \alpha = -a$$

$$\therefore a = -3$$

$$\textcircled{C} \text{에서 } 3 + 2\alpha = b$$

$$\therefore b = 5$$

$$\text{따라서 } ab = -15$$

11. 다음을 읽고 물음에 답하여라.

삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c 는 실수)에서 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 라 두고 $x = 1 + 2i$ 를 대입하면 $f(1 + 2i) = (1 + 2i)^3 + a(1 + 2i)^2 + b(1 + 2i) + c = 0$ 이 된다. 이것을 전개하여 정리하면 $(-11 - 3a + b + c) + (-2 + 4a + 2b)i = 0$ a, b, c 가 실수이므로 이제 $x = 1 - 2i$ 를 대입하면 $f(1 - 2i) = (1 - 2i)^3 + a(1 - 2i)^2 + b(1 - 2i) + c = (-11 - 3a + b + c) - (-2 + 4a + 2b)i = 0$ 따라서 ((가))

(가)에 들어갈 말로 가장 알맞는 것을 고르면?

- ① 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c 는 실수)의 한 근이 $1 + 2i$ 이면, $1 - 2i$ 도 근임을 알 수 있다.
- ② 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c 는 실수)의 한 근이 $1 - 2i$ 이면, $1 + 2i$ 도 근임을 알 수 있다.
- ③ 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c 는 실수)의 한 근이 $1 + 2i$ 라고 해서, 반드시 $1 - 2i$ 가 근이 되는 것은 아니다.
- ④ 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c 는 실수)의 한 근이 $1 - 2i$ 라고 해서, 반드시 $1 + 2i$ 가 근이 되는 것은 아니다.
- ⑤ 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c 는 실수)은 반드시 하나의 실근을 가진다.

해설

$x = 1 + 2i$ 를 대입한 결과와 $x = 1 - 2i$ 를 대입한 결과가 같다.

12. 계수가 실수인 사차방정식 $x^4 + 2x^3 + ax^2 + bx + 15 = 0$ 의 한 근이 $1 + 2i$ 일 때, 나머지 세 근 중 실근의 합은?

① -4 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 4

해설

두 허근은 $1 + 2i$, $1 - 2i$ 나머지 두 실근을 α, β 라 하면
네 근의 합 : $(1 + 2i) + (1 - 2i) + \alpha + \beta = -2$
 $\therefore$ 두 실근의 합 : $\alpha + \beta = -4$

13. 삼차방정식 $x^3 - 7x^2 + px + q = 0$ 의 한 근은 $3 + \sqrt{2}$ 이다. 유리수 p, q 의 값을 구했을 때, $p + q$ 의 값은?

① 6 ② 10 ③ -2 ④ -1 ⑤ 1

해설

$x^3 - 7x^2 + px + q = 0$ 의 세 근은 $3 + \sqrt{2}, 3 - \sqrt{2}, \alpha$

세 근의 합 : $\alpha + (3 + \sqrt{2}) + (3 - \sqrt{2}) = 7$

$\therefore \alpha = 1$

$p = (3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) + \alpha(3 - \sqrt{2}) + \alpha(3 + \sqrt{2}) = 7 + 6 \quad \therefore p = 13$

$-q = (3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) \cdot 1 = 7$

$\therefore q = -7$

$\therefore p + q = 13 - 7 = 6$

14. α, β 를 방정식 $x^3 = 1$ 의 두 허근이라 할 때, $\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)^{10} + (\beta^2 + 1)^{10}$

의 값을 구하면?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$x^3 - 1 = 0, (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0 \text{의}$$

두 허근이 α, β 라면,

$x^2 + x + 1 = 0$ 의 두 허근이 α, β 이다.

$$\alpha + \beta = -1, \alpha\beta = 1$$

$$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0, \alpha + 1 + \frac{1}{\alpha} = 0,$$

$$\frac{1}{\alpha} + 1 = -\alpha$$

$$\beta^2 + \beta + 1 = 0,$$

$$\beta^2 + 1 = -\beta$$

$$\alpha^3 = 1, \beta^3 = 1$$

$$\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)^{10} + (\beta^2 + 1)^{10}$$

$$= (-\alpha)^{10} + (-\beta)^{10}$$

$$= \alpha^{10} + \beta^{10}$$

$$= (\alpha^3)^3 \alpha + (\beta^3)^3 \beta$$

$$= \alpha + \beta = -1$$

15. 어떤 정육면체의 밑변의 가로와 세로의 길이를 1 cm 줄이고, 세로의 길이와 높이를 각각 2 cm, 3 cm 씩 늘였더니 이 직육면체의 부피가 처음 정육면체의 부피의 $\frac{5}{2}$ 배가 되었다. 처음 정육면체의 한 변의 길이를 구하여라. (단, 정육면체 한 변의 길이는 유리수이다.)

▶ 답 : cm

▷ 정답 : 2 cm

해설

정육면체의 한 변의 길이가 x cm라 하면
조건으로부터 $(x-1)(x+2)(x+3) = \frac{5}{2}x^3$,
 $x^3 + 4x^2 + x - 6 = \frac{5}{2}x^3$,
 $\frac{3}{2}x^3 - 4x^2 - x + 6 = 0$ 에서
 $3x^3 - 8x^2 - 2x + 12 = 0$ 을 풀면 $x = 2$ (cm)

16. 다음은 a 가 삼차방정식 $x^3 - 3x + 1 = 0$ 의 한 근일 때, $a^2 - 2$ 도 이 방정식의 근임을 보인 것이다. (가)~(마)에 들어갈 말로 옳지 않은 것은?

a 는 $x^3 - 3x + 1 = 0$ 의 근이므로 (가)
 $f(x) = x^3 - 3x + 1$ 이라고 하면
 $f(a^2 - 2) = (\text{나}) = (\text{다}) = (\text{라}) = (\text{마}) = 0$
따라서, $a^2 - 2$ 도 삼차방정식 $x^3 - 3x + 1 = 0$ 의 근이다.

- ① (가) $a^3 - 3a + 1 = 0$
- ② (나) $(a^2 - 2)^3 - 3(a^2 - 2) + 1$
- ③ (다) $a^6 - 6a^4 + 9a^2 - 1$
- ④ (라) $(a^3 - 3a + 1)(a^3 - 3a - 1)$
- ⑤ (마) $0 \cdot 2$

해설

a 는 $x^3 - 3x + 1 = 0$ 의 근이므로 $a^3 - 3a + 1 = 0$
 $f(x) = x^3 - 3x + 1$ 이라고 하면 $f(a^2 - 2) = (a^2 - 2)^3 - 3(a^2 - 2) + 1$
 $= a^6 - 6a^4 + 9a^2 - 1 = (a^3 - 3a + 1)(a^3 - 3a - 1) = 0 \cdot (-2) = 0$
따라서 $a^2 - 2$ 도 삼차방정식 $x^3 - 3x + 1 = 0$ 의 근이다.

17. 다음 세 개의 방정식이 공통근을 가질 때, ab 의 값은?

$x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0, \quad x^3 + 2x^2 + ax + b = 0, \quad x^2 + bx + a = 0$

- ① -1
- ② 3
- ③ $-\frac{9}{4}$
- ④ $\frac{9}{16}$
- ⑤ $-\frac{81}{16}$

해설

$x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$ 의 좌변을 인수분해하면 $(x - 1)^2(x + 3) = 0$ ∴ $x = 1$ 또는 $x = -3$

(i) 공통근이 $x = 1$ 인 경우 나머지 두 방정식에 $x = 1$ 을 대입하면 두 식을 동시에 만족하는 a, b 값은 없다.

(ii) 공통근이 $x = -3$ 인 경우 다른 두 방정식은 $x = -3$ 을 근으로 하므로 $\{-27 + 18 - 3a + b = 0\} \cdots \cdots \textcircled{\tiny{㉠}}$

$\{9 - 3b + a = 0\} \cdots \cdots \textcircled{\tiny{㉡}}$

①, ②을 연립하여 풀면 $a = -\frac{9}{4}, b = \frac{9}{4}, ab = -\frac{81}{16}$

18. 다음 방정식의 실근의 합을 구하여라.

$$x^4 + 5x^3 - 12x^2 + 5x + 1 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

$x = 0$ 을 대입하면
 $1 = 0$ 이 되어 모순이므로 $x \neq 0$ 이다.
따라서, 주어진 식의 양변을
 x^2 으로 나누면
$$x^2 + 5x - 12 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$
$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 12 = 0$$
$$\therefore \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 14 = 0$$
여기서 $x + \frac{1}{x} = X$ 로 놓으면
$$X^2 + 5X - 14 = 0, (X + 7)(X - 2) = 0$$
$$\therefore X = -7 \text{ 또는 } X = 2$$
(i) $X = -7$ 일 때,
 $x + \frac{1}{x} = -7$ 에서
$$x^2 + 7x + 1 = 0$$
$$\therefore \frac{-7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$
(ii) $X = 2$ 일 때,
 $x + \frac{1}{x} = 2$ 에서
$$x^2 - 2x + 1 = 0, (x - 1)^2 = 0$$
$$\therefore x = 1$$
(i), (ii)로부터
$$x = 1(\text{중근}) \text{ 또는 } x = \frac{-7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$
따라서, 모든 근의 합은
$$1 + \frac{-7 + 3\sqrt{5}}{2} + \frac{-7 - 3\sqrt{5}}{2} = -6 \text{이다.}$$

19. 방정식 $2x^4 - 5x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$ 의 모든 실근의 합을 a , 모든 허근의 곱을 b 라 할 때, $a + b$ 의 값은?

① 5 ② 3 ③ $\frac{3}{2}$ ④ -2 ⑤ 4

해설

$2x^4 - 5x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$ 양변을
 x^2 으로 나누고 정리하면
 $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0$
 $2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0$
 $2t^2 - 5t - 3 = (2t + 1)(t - 3) = 0$
 $\left(2x + \frac{2}{x} + 1\right)\left(x + \frac{1}{x} - 3\right) = 0$
 $\therefore (2x^2 + x + 2)(x^2 - 3x + 1) = 0$
이 때, $2x^2 + x + 2 = 0$ 은 허근을 갖고,
 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 은 실근을 가지므로
실근의 합 $a = 3$, 허근의 곱 $b = 1$ 이다.
 $\therefore a + b = 4$

20. 방정식 $x^4 + Ax^3 - 7x^2 - Ax + 3B = 0$ 의 두 근이 -1 과 -2 일 때, 다른 두 근을 α, β 라 하자. 이 때, $A + B - \alpha\beta$ 의 값을 구하면?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f(x) = x^4 + Ax^3 - 7x^2 - Ax + 3B$ 라 하면 $-1, -2$ 가 근이므로
 $f(-1) = 1 - A - 7 + A + 3B = 0$
 $\therefore B = 2$
 $f(-2) = 16 - 8A - 28 + 2A + 3B = 0, -6A + 3B - 12 = 0 \quad \therefore A = -1$
 $\therefore A + B = -1 + 2 = 1 \cdots \cdots \textcircled{\text{㉠}}$
 $\therefore (x+1)(x+2)(x^2 - 4x + 3) = 0$
따라서, 다른 두 근은 $x^2 - 4x + 3 = 0$ 의 근이다.
 $\therefore \alpha\beta = 3 \cdots \cdots \textcircled{\text{㉡}}$
 $\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}$ 에서 $A + B - \alpha\beta = 1 - 3 = -2$

21. $1-\sqrt{2}i$ 를 근으로 갖고 계수가 실수인 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 과 이차방정식 $x^2+ax+4=0$ 이 공통근을 갖는다. 이 때, $a+b+c$ 의 값은?

- ① -5
- ② -4
- ③ -3
- ④ -2
- ⑤ -1

해설

$x^3+ax^2+bx+c=0$ 의 세근을 $1=\sqrt{2}i, 1+\sqrt{2}i, \alpha$ 라 하면근과 계수와의 관계에 의해
 $2+\alpha=-a, 2\alpha+3=b, 3\alpha=-c \quad \cdots (가)$
한편 $x^2+ax+4=0$ 과의 공통근이 $1-\sqrt{2}i, 1+\sqrt{2}i$ 이면 두근의 곱이 3 이 되므로 적합하지 않다.
따라서 공통근은 x 이고 $x^2+ax+4=0$
 $\therefore \alpha=2$ (가)의 세 식에 각각 $\alpha=2$ 를 대입하면 $a=-4, b=7, c=-6$
 $\therefore a+b+c=-3$

22. 다음은 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 유도하는 과정을 나타낸 것이다. 이 때, ㉠ ~ ㉣에 들어갈 말로 옳지 않은 것은?

삼차방정식 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라고 하면 이 방정식의 좌변은 다음과 같이 인수분해할 수 있다.
 $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(\text{㉠})(x - \beta)(x - \gamma)$
이 때, 이 등식의 우변을 전개하여 정리하면
 $ax^3 + bx^2 + cx + d = ax^3 - a(\text{㉡})x^2 + a(\text{㉢})x - a(\text{㉣})$ 가 되는데 이것은 x 에 대한 (㉤)이다.
따라서, 이 등식의 동류항의 계수는 서로 같아야 하므로
 $b = -a(\text{㉡}), c = a(\text{㉢}), d = -a(\text{㉣})$
각 식의 양변을 a 로 나누고, 좌변과 우변을 바꾸어 쓰면
 $\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$
 $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$
 $\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$

- ① ㉠ $x + a$
- ② ㉡ $\alpha + \beta + \gamma$
- ③ ㉢ $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$
- ④ ㉣ $\alpha\beta\gamma$
- ⑤ ㉤ 항등식

해설

(가) $x - \alpha$

23. 방정식 $2x^3 - 3x^2 + 6 = 0$ 의 세 근을 α, β, r 라 할 때, $(\sqrt{2} - \alpha)(\sqrt{2} - \beta)(\sqrt{2} - r)$ 의 값은?

- ① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

$2x^3 - 3x^2 + 6 = 0$ 의 세 근이
 α, β, r 이므로
 $2x^3 - 3x^2 + 6 = 2(x - \alpha)(x - \beta)(x - r)$
양변에 $\sqrt{2}$ 를 대입하면
 $4\sqrt{2} - 6 + 6$
 $= 2(\sqrt{2} - \alpha)(\sqrt{2} - \beta)(\sqrt{2} - r)$
 $\therefore (\sqrt{2} - \alpha)(\sqrt{2} - \beta)(\sqrt{2} - r) = 2\sqrt{2}$

24. $x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 한다. $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ 을 근으로 하는 삼차방정식이 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 일 때, abc 의 값을 구하면?

- ① 2
- ② 3
- ③ 4
- ④ 5
- ⑤ 6

해설

$x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0$ 의
세 근이 α, β, γ 이므로
 $\alpha + \beta + \gamma = -2,$
 $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3,$
 $\alpha\beta\gamma = -1$
 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = -3,$
 $\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha\beta\gamma} = 2,$
 $\frac{1}{\alpha\beta\gamma} = -1$
따라서 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ 를 세 근으로 하는
삼차항의 계수가 1인 방정식은
 $x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$
 $\Leftrightarrow x^3 + ax^2 + bx + c = 0$
 $\therefore a = 3, b = 2, c = 1$

해설

$x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$
 $x = \frac{1}{X}$ 로 놓으면
 $\left(\frac{1}{X}\right)^3 + 2 \cdot \left(\frac{1}{X}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{X}\right) + 1 = 0$
 $\therefore X^3 + 3X^2 + 2X + 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ 의 세 근이 α, β, γ 이므로
 $\textcircled{2}$ 의 세 근은 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ 이다.
 $\therefore$ 구하는 방정식은
 $X^3 + 3X^2 + 2X + 1 = 0$ 에서
 $abc = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

25. 방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, 보기 중에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

㉡ $\omega^2 = 1$

㉢ $\omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}} = 2$

㉣ $\omega^{1005} + \omega^{1004} = -\omega$

㉤ $\omega^{18} + \omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}} = 3$

① ㉠, ㉢

② ㉡

③ ㉠, ㉢, ㉣

④ ㉢, ㉣, ㉤

⑤ ㉠, ㉢, ㉣, ㉤

해설

$$x^3 - 1 = 0,$$

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0,$$

$$\omega^2 = -1 - \omega \cdots \text{㉠, ㉡}$$

$$\omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}}$$

$$= (\omega^3)^{33} + \frac{1}{(\omega^3)^{33}} = 2 \cdots \text{㉢}$$

$$\omega^{1005} + \omega^{1004}$$

$$= (\omega^3)^{335} + (\omega^3)^{334} \times \omega^2$$

$$= \omega^2 + 1 = -\omega \cdots \text{㉣}$$

$$\omega^{18} + \omega^{99} + \frac{1}{\omega^{99}}$$

$$= (\omega^3)^6 + (\omega^3)^{33} + \frac{1}{(\omega^3)^{33}} = 3 \cdots \text{㉤}$$