1. $x^4-5x^2-14=0$의 두 허근을 α, β라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하면?

① 4 ② -4 ③ 8 ④ -8 ⑤ -16

해설

$x^4-5x^2-14=(x^2+2)(x^2-7)=0$이므로

두 허근 α, β는

각각 $\sqrt{2}i$, $-\sqrt{2}i$이므로

$\alpha^2+\beta^2=-2-2=-4$

2. $x^3-1=0$의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega^3+\overline{\omega}^3$의 값을 구하면? (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$

$x=1$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$를 ω라 하면

$\overline{\omega}=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore\ \omega^3=1,\ \overline{\omega}^3=1,\ \omega^3+\overline{\omega}^3=2$

3. 사차방정식 $x^4 - 2x^3 + x^2 - 4 = 0$ 의 서로 다른 두 허근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
-1 & 1 & -2 & 1 & 0 & -4 \\
 & & -1 & 3 & -4 & 4 \\
\hline
2 & 1 & -3 & 4 & -4 & \boxed{0} \\
 & & 2 & -2 & 4 & \\
\hline
 & 1 & -1 & 2 & \boxed{0} &
\end{array}
$$

$(x+1)(x-2)(x^2 - x + 2) = 0$

따라서 두 허근은 $x^2 - x + 2 = 0$ 의 근

허근의 합은 근과 계수와의 관계에 의해 $\alpha + \beta = 1$

4. 다음 사차방정식을 풀 때 근이 아닌 것을 구하면?

$$(x^2-2x)^2-6(x^2-2x)-16=0$$

① 4　　② -4　　③ -2　　④ $1+i$　　⑤ $1-i$

해설

$x^2-2x=X$ 로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-6X-16=0,\ (X-8)(X+2)=0$

$\therefore x=8$ 또는 $X=-2$

(i) $X=8$ 일 때 $x^2-2x=8$ 에서 $(x-4)(x+2)=0$

$\therefore x=4$ 또는 $x=-2$

(ii) $X=-2$ 일 때$x^2-2x=-2$ 에서 $x^2-2x+2=0$

$\therefore x=1\pm i$

따라서 (i), (ii) 에서 $x=4$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=1\pm i$

5. 다음 방정식의 모든 해의 곱을 구하여라.

$$(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3=0$ 에서

$x^2-2x=t$ 로 놓으면

$t(t-2)-3=0,$

$t^2-2t-3=0$

$(t-3)(t+1)=0$

$\therefore\ t=3$ 또는 $t=-1$

(i) $t=3$, 즉 $x^2-2x=3$ 일 때

$x^2-2x-3=0$

$(x-3)(x+1)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=3$

(ii) $t=-1$, 즉 $x^2-2x=-1$ 일 때

$x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$

$\therefore\ x=1$ (중근)

따라서, $-1\times3\times1=-3$

6. 방정식 $(x^2+2)^2-6x^2-7=0$의 두 실근의 합을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 0

해설

$(x^2+2)^2-6x^2-7=0$에서

$x^4+4x^2+4-6x^2-7=0$

$x^4-2x^2-3=0$

$x^2=t$로 치환하면

$t^2-2t-3=0,\ (t-3)(t+1)=0$

$\therefore\ t=3$ 또는 $t=-1$

(i) $x^2=3$일 때, $x=\pm\sqrt{3}$

(ii) $x^2=-1$일 때, $x=\pm i$

(i), (ii)에서 실근의 합을 구하면

$\sqrt{3}+(-\sqrt{3})=0$

7. 삼차방정식 $x^3+x^2-(k+2)x+k=0$이 중근을 가질 때, k의 값을 구하면?

① -1 ② 0 ③ $-1,\ 3$ ④ $0,\ 3$ ⑤ 3

해설

$x^3+x^2-(k+2)x+k=0$, $(x-1)(x^2+2x-k)=0$이 중근을 가지려면

ⅰ) $x=1$이 중근일 때,

$1+2-k=0$

$\therefore\ k=3$

ⅱ) $x^2+2x-k=0$이 중근이면

$\frac{D}{4}=1+k=0$

$\therefore\ k=-1$

8. $1-\sqrt{2}$ 가 방정식 $2x^2+px+q=0$의 해이고 유리수 p, q가 $x^3+ax^2+2x+b=0$ 의 해 일 때 b의 값은?

① 2　② -2　③ 4　④ -6　⑤ -8

해설

유리수 계수의 이차방정식이므로 한 근이 $1-\sqrt{2}$ 이면
다른 한 근은 $1+\sqrt{2}$ 이다.
두 근의 합은 2
두 근의 곱은 -1
$\therefore\ p=-4,\quad q=-2$ ($\because$ 근과 계수의 관계를 이용)
$p=-4,\ q=-2$ 을 주어진 삼차방정식에 대입하면
$-64+16a-8+b=0,\ -8+4a-4+b=0$ 연립하여 풀면
$a=5,\quad b=-8$

9. 삼차방정식 $x^3+x^2+2x-3=0$ 의 세 근 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 에 대하여 $\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$,$\alpha\beta\gamma$를 세 근으로 갖는 삼차방정식이 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 일 때, $a-2b+c$ 의 값은?

① -3　　② -2　　③ -1　　④ 0　　⑤ 1

해설

$x^3+x^2+2x-3=0$ 의 세 근이 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$, $\alpha\beta\gamma=3$

구하려는 방정식의 세 근의 합

$-1+2+3=4 \quad \therefore a=-4$

$(-1)\times 2+2\times 3+(-1)\times 3=-2+6-3=1 \quad \therefore b=1$

세 근의 곱 $(-1)\times 2\times 3=-6 \quad \therefore c=6$

$\therefore a-2b+c=-4-2+6=0$

10. 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx-3=0$의 한 근이 $1+\sqrt{2}i$일 때, 두 실수 a, b 의 곱 ab는? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 10 ② 5 ③ 0 ④ -10 ⑤ -15

해설

계수가 실수이므로 주어진 방정식의 다른 허근은 $1-\sqrt{2}i$ 이다.
이때, 또 다른 한 근을 α 라고 하면 삼차방정식의 근과 계수와의 관계에서

$(1-\sqrt{2}i)(1+\sqrt{2}i)\alpha=3$ ······㉠
$(1-\sqrt{2}i)+(1+\sqrt{2}i)+\alpha=-a$ ······㉡
$(1-\sqrt{2}i)(1+\sqrt{2}i)+(1-\sqrt{2}i)\alpha+(1+\sqrt{2}i)\alpha=b$ ······㉢

㉠에서 $3\alpha=3$
$\therefore \alpha=1$
㉡에서 $2+\alpha=-a$
$\therefore a=-3$
㉢에서 $3+2\alpha=b$
$\therefore b=5$
따라서 $ab=-15$

11. 다음을 읽고 물음에 답하여라.

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$ (a,b,c는 실수) 에서 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 라 두고 $x=1+2i$를 대입하면 $f(1+2i)=(1+2i)^3+a(1+2i)^2+b(1+2i)+c=0$ 이 된다. 이것을 전개하여 정리하면 $(-11-3a+b+c)+(-2+4a+2b)i=0$ a,b,c 가 실수이므로 이제 $x=1-2i$ 를 대입하면 $f(1-2i)=(1-2i)^3+a(1-2i)^2+b(1-2i)+c=(-11-3a+b+c)-(-2+4a+2b)i=0$ 따라서 (　　(가)　　)

(가) 에 들어갈 말로 가장 알맞는 것을 고르면?

① 삼차방정식$x^3+ax^2+bx+c=0$ (a, b, c 는 실수) 의 한 근이 $1+2i$ 이면, $1-2i$ 도 근임을 알 수 있다.

② 삼차방정식$x^3+ax^2+bx+c=0$ (a, b, c 는 실수) 의 한 근이 $1-2i$ 이면, $1+2i$ 도 근임을 알 수 있다.

③ 삼차방정식$x^3+ax^2+bx+c=0$ (a, b, c 는 실수) 의 한 근이 $1+2i$ 라고 해서, 반드시$1-2i$ 가 근이 되는 것은 아니다.

④ 삼차방정식$x^3+ax^2+bx+c=0$ (a, b, c 는 실수) 의 한 근이 $1-2i$ 라고 해서, 반드시$1+2i$ 가 근이 되는 것은 아니다.

⑤ 삼차방정식$x^3+ax^2+bx+c=0$ (a, b, c 는 실수) 은 반드시 하나의 실근을 가진다.

해설

$x=1+2i$ 를 대입한 결과와 $x=1-2i$를 대입한 결과가 같다.

12. 계수가 실수인 사차방정식 $x^4+2x^3+ax^2+bx+15=0$의 한 근이 $1+2i$일 때, 나머지 세 근 중 실근의 합은?

① -4 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 4

해설

두 허근은 $1+2i$, $1-2i$ 나머지 두 실근을 α, β라 하면

네 근의 합 : $(1+2i)+(1-2i)+\alpha+\beta=-2$

$\therefore$ 두 실근의 합 : $\alpha+\beta=-4$

13. 삼차방정식 $x^3 - 7x^2 + px + q = 0$의 한 근은 $3 + \sqrt{2}$이다. 유리수 p, q의 값을 구했을 때, $p + q$의 값은?

① 6　　② 10　　③ -2　　④ -1　　⑤ 1

해설

$x^3 - 7x^2 + px + q = 0$의 세 근은 $3 + \sqrt{2}, 3 - \sqrt{2}, \alpha$

세 근의 합 : $\alpha + (3 + \sqrt{2}) + (3 - \sqrt{2}) = 7$

$\therefore\ \alpha = 1$

$p = (3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2}) + \alpha(3-\sqrt{2}) + \alpha(3+\sqrt{2}) = 7+6 \quad \therefore\ p = 13$

$-q = (3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) \cdot 1 = 7$

$\therefore\ q = -7$

$\therefore\ p + q = 13 - 7 = 6$

14. α, β를 방정식 $x^3=1$의 두 허근이라 할 때, $\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)^{10}+(\beta^2+1)^{10}$의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$의
두 허근이 α,β라면,
$x^2+x+1=0$의 두 허근이 α,β이다.
$\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=1$
$\alpha^2+\alpha+1=0,\ \alpha+1+\frac{1}{\alpha}=0,$
$\frac{1}{\alpha}+1=-\alpha$
$\beta^2+\beta+1=0,$
$\beta^2+1=-\beta$
$\alpha^3=1, \beta^3=1$
$\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)^{10}+(\beta^2+1)^{10}$
$=(-\alpha)^{10}+(-\beta)^{10}$
$=\alpha^{10}+\beta^{10}$
$=(\alpha^3)^3\alpha+(\beta^3)^3\beta$
$=\alpha+\beta=-1$

15. 어떤 정육면체의 밑변의 가로의 길이를 1 cm줄이고, 세로의 길이와 높이를 각각 2 cm, 3 cm씩 늘였더니 이 직육면체의 부피가 처음 정육면체의 부피의 $\frac{5}{2}$ 배가 되었다. 처음 정육면체의 한 변의 길이를 구하여라. (단, 정육면체 한 변의 길이는 유리수이다.)

▶ 답 : ________ cm

▷ 정답 : 2 cm

해설

정육면체의 한 변의 길이가 x cm라 하면

조건으로부터 $(x-1)(x+2)(x+3) = \frac{5}{2}x^3$,

$x^3 + 4x^2 + x - 6 = \frac{5}{2}x^3$,

$\frac{3}{2}x^3 - 4x^2 - x + 6 = 0$ 에서

$3x^3 - 8x^2 - 2x + 12 = 0$을 풀면 $x = 2(\mathrm{cm})$

16. 다음은 α가 삼차방정식 $x^3-3x+1=0$의 한 근일 때, α^2-2도 이 방정식의 근임을 보인 것이다. (가)~(마)에 들어갈 말로 옳지 <u>않은</u> 것은?

α 는 $x^3-3x+1=0$ 의 근이므로 (가) $f(x)=x^3-3x+1$ 이라고 하면 $f(\alpha^2-2)=$ (나) $=$ (다) $=$ (라) $=$ (마) $=0$ 따라서, α^2-2 도 삼차방정식 $x^3-3x+1=0$ 의 근이다.

① (가) $\alpha^3-3\alpha+1=0$

② (나) $(\alpha^2-2)^3-3(\alpha^2-2)+1$

③ (다) $\alpha^6-6\alpha^4+9\alpha^2-1$

④ (라) $(\alpha^3-3\alpha+1)(\alpha^3-3\alpha-1)$

⑤ (마) $0\cdot 2$

해설

α는 $x^3-3x+1=0$의 근이므로 $\alpha^3-3\alpha+1=0$
$f(x)=x^3-3x+1$이라고 하면 $f(\alpha^2-2)=(\alpha^2-2)^3-3(\alpha^2-2)+1$
$=\alpha^6-6\alpha^4+9\alpha^2-1=(\alpha^3-3\alpha+1)(\alpha^3-3\alpha-1)=0\cdot(-2)=0$
따라서 α^2-2도 삼차방정식 $x^3-3x+1=0$의 근이다.

17. 다음 세 개의 방정식이 공통근을 가질 때, ab의 값은?

$$x^3+x^2-5x+3=0,\ x^3+2x^2+ax+b=0, x^2+bx+a=0$$

① -1 ② 3 ③ $-\frac{9}{4}$ ④ $\frac{9}{16}$ ⑤ $-\frac{81}{16}$

해설

$x^3+x^2-5x+3=0$의 좌변을 인수분해하면 $(x-1)^2(x+3)=0$ $\therefore\ x=1$ 또는 $x=-3$

(i) 공통근이 $x=1$인 경우 나머지 두 방정식에 $x=1$을 대입하면 두 식을 동시에 만족하는 $a,\ b$값은 없다.

(ii) 공통근이 $x=-3$인 경우 다른 두 방정식은 $x=-3$을 근으로 하므로 $\{-27+18-3a+b=0\}$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\{9-3b+a=0\}\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡ 을 연립하여 풀면 $a=-\frac{9}{4},\ b=\frac{9}{4},\ ab=-\frac{81}{16}$

18. 다음 방정식의 실근의 합을 구하여라.

$$x^4 + 5x^3 - 12x^2 + 5x + 1 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

$x = 0$을 대입하면
$1 = 0$이 되어 모순이므로 $x \neq 0$이다.
따라서, 주어진 식의 양변을
x^2으로 나누면

$$x^2 + 5x - 12 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 12 = 0$$

$$\therefore \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 14 = 0$$

여기서 $x + \frac{1}{x} = X$로 놓으면

$X^2 + 5X - 14 = 0,\ (X + 7)(X - 2) = 0$

$\therefore X = -7$ 또는 $X = 2$

(i) $X = -7$일 때,

$x + \frac{1}{x} = -7$에서

$x^2 + 7x + 1 = 0$

$\therefore \frac{-7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$

(ii) $X = 2$일 때,

$x + \frac{1}{x} = 2$에서

$x^2 - 2x + 1 = 0,\ (x - 1)^2 = 0$

$\therefore x = 1$

(i), (ii)로부터

$x = 1$(중근) 또는 $x = \frac{-7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$

따라서, 모든 근의 합은

$1 + \frac{-7 + 3\sqrt{5}}{2} + \frac{-7 - 3\sqrt{5}}{2} = -6$이다.

19. 방정식 $2x^4-5x^3+x^2-5x+2=0$의 모든 실근의 합을 a, 모든 허근의 곱을 b라 할 때, $a+b$의 값은?

① 5 ② 3 ③ $\frac{3}{2}$ ④ -2 ⑤ 4

해설

$2x^4-5x^3+x^2-5x+2=0$ 양변을
x^2 으로 나누고 정리하면

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0$$

$$2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$$

$$2t^2-5t-3=(2t+1)(t-3)=0$$

$$\left(2x+\frac{2}{x}+1\right)\left(x+\frac{1}{x}-3\right)=0$$

$\therefore (2x^2+x+2)(x^2-3x+1)=0$
이 때, $2x^2+x+2=0$은 허근을 갖고,
$x^2-3x+1=0$은 실근을 가지므로
실근의 합 $a=3$, 허근의 곱 $b=1$이다.
$\therefore a+b=4$

20. 방정식 $x^4 + Ax^3 - 7x^2 - Ax + 3B = 0$의 두 근이 -1과 -2일 때, 다른 두 근을 α, β라 하자. 이 때, $A + B - \alpha\beta$의 값을 구하면?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f(x) = x^4 + Ax^3 - 7x^2 - Ax + 3B$라 하면 $-1, -2$가 근이므로

$f(-1) = 1 - A - 7 + A + 3B = 0$

$\therefore \ B = 2$

$f(-2) = 16 - 8A - 28 + 2A + 3B = 0, -6A + 3B - 12 = 0 \quad \therefore \ A = -1$

$\therefore \ A + B = -1 + 2 = 1 \cdots\cdots$ ㉠

$\therefore \ (x+1)(x+2)(x^2 - 4x + 3) = 0$

따라서, 다른 두 근은 $x^2 - 4x + 3 = 0$의 근이다.

$\therefore \ \alpha\beta = 3 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $A + B - \alpha\beta = 1 - 3 = -2$

21. $1-\sqrt{2}i$를 근으로 갖고 계수가 실수인 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$과 이차방정식 $x^2+ax+4=0$이 공통근을 갖는다. 이 때, $a+b+c$의 값은?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

$x^3+ax^2+bx+c=0$의 세근을 $1=\sqrt{2}i, 1+\sqrt{2}i, \alpha$라 하면근과 계수와의 관계에 의해

$2+\alpha=-a, 2\alpha+3=b, 3\alpha=-c \quad \cdots$ (가)

한편 $x^2+ax+4=0$과의 공통근이$1-\sqrt{2}i, 1+\sqrt{2}i$이면 두근의 곱이 3 이 되므로 적합하지 않다.

따라서 공통근은 x이고 $x^2+a\alpha+4=0$

$\therefore \ \alpha=2$ (가) 의 세 식에 각각 $\alpha=2$ 를 대입하면$a=-4, b=7, c=-6$

$\therefore \ a+b+c=-3$

22. 다음은 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 유도하는 과정을 나타낸 것이다. 이 때, (가) ~ (마)에 들어갈 말로 옳지 않은 것은?

> 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라고 하면 이 방정식의 좌변은 다음과 같이 인수분해할 수 있다.
>
> $ax^3+bx^2+cx+d=a(\text{(가)})(x-\beta)(x-\gamma)$
>
> 이 때, 이 등식의 우변을 전개하여 정리하면
>
> $ax^3+bx^2+cx+d=ax^3-a(\text{(나)})x^2+a(\text{(다)})x-a(\text{(라)})$가 되는데 이것은 x에 대한 (마)이다.
>
> 따라서, 이 등식의 동류항의 계수는 서로 같아야 하므로
>
> $b=-a(\text{(나)}),\ c=a(\text{(다)}),\ d=-a(\text{(라)})$
>
> 각 식의 양변을 a로 나누고, 좌변과 우변을 바꾸어 쓰면
>
> $\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}$
>
> $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a}$
>
> $\alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}$

① (가) $x+a$　　② (나) $\alpha+\beta+\gamma$

③ (다) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$　　④ (라) $\alpha\beta\gamma$

⑤ (마) 항등식

해설

(가) $x-\alpha$

23. 방정식 $2x^3 - 3x^2 + 6 = 0$의 세 근을 α, β, r라 할 때, $(\sqrt{2}-\alpha)(\sqrt{2}-\beta)(\sqrt{2}-r)$의 값은?

① $\sqrt{2}$　② $2\sqrt{2}$　③ $3\sqrt{2}$　④ $4\sqrt{2}$　⑤ $5\sqrt{2}$

해설

$2x^3 - 3x^2 + 6 = 0$의 세 근이

α, β, r이므로

$2x^3 - 3x^2 + 6 = 2(x-\alpha)(x-\beta)(x-r)$

양변에 $\sqrt{2}$를 대입하면

$4\sqrt{2} - 6 + 6$

$= 2(\sqrt{2}-\alpha)(\sqrt{2}-\beta)(\sqrt{2}-r)$

$\therefore$ $(\sqrt{2}-\alpha)(\sqrt{2}-\beta)(\sqrt{2}-r) = 2\sqrt{2}$

24. $x^3+2x^2+3x+1=0$의 세 근을 α,β,γ라 한다. $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}$을 근으로 하는 삼차방정식이 $x^3+ax^2+bx+c=0$일 때, abc의 값을 구하면?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$x^3+2x^2+3x+1=0$의
세 근이 α,β,γ이므로
$\alpha+\beta+\gamma=-2,$
$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3,$
$\alpha\beta\gamma=-1$

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=-3,$$

$$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=2,$$

$$\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=-1$$

따라서 $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}$를 세 근으로 하는
삼차항의 계수가 1인 방정식은
$x^3+3x^2+2x+1=0$
$\Leftrightarrow x^3+ax^2+bx+c=0$
$\therefore a=3,b=2,c=1$

해설

$x^3+2x^2+3x+1=0\cdots\cdots$ ①
$x=\frac{1}{X}$로 놓으면

$$\left(\frac{1}{X}\right)^3+2\cdot\left(\frac{1}{X}\right)^2+3\cdot\left(\frac{1}{X}\right)+1=0$$

$\therefore\ X^3+3X^2+2X+1=0\cdots\cdots$ ②
①의 세 근이 α,β,γ이므로
②의 세 근은 $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}$이다.
$\therefore$구하는 방정식은
$X^3+3X^2+2X+1=0$에서
$abc=3\cdot 2\cdot 1=6$

25. 방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 ω라 할 때, 보기 중에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

ㄴ $\omega^2 = 1$

ㄷ $\omega^{99} + \dfrac{1}{\omega^{99}} = 2$

ㄹ $\omega^{1005} + \omega^{1004} = -\omega$

ㅁ $\omega^{18} + \omega^{99} + \dfrac{1}{\omega^{99}} = 3$

① ㄱ, ㄷ
② ㄴ
③ ㄱ, ㄷ, ㄹ
④ ㄷ, ㄹ, ㅁ
⑤ ㄱ, ㄷ, ㄹ, ㅁ

해설

$x^3 - 1 = 0,$

$(x-1)(x^2+x+1) = 0$

$\Rightarrow \omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0,$

$\omega^2 = -1 - \omega \cdots$ ㄱ, ㄴ

$\omega^{99} + \dfrac{1}{\omega^{99}}$

$= (\omega^3)^{33} + \dfrac{1}{(\omega^3)^{33}} = 2 \cdots$ ㄷ

$\omega^{1005} + \omega^{1004}$

$= (\omega^3)^{335} + (\omega^3)^{334} \times \omega^2$

$= \omega^2 + 1 = -\omega \cdots$ ㄹ

$\omega^{18} + \omega^{99} + \dfrac{1}{\omega^{99}}$

$= (\omega^3)^6 + (\omega^3)^{33} + \dfrac{1}{(\omega^3)^{33}} = 3 \cdots$ ㅁ