1. 다음 안에 알맞은 수는?

$$5^{x+3} = \square \times 5^x$$

- ① 5 ② 15 ③ 25 ④ 75 ⑤ 125

해설

$$5^{x+3} = 5^x \times 5^3 = 125 \times 5^x \text{ 이므로 } \square = 125 \text{ 이다.}$$

2. $3^{12} = 81^x$ 일 때, x 의 값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$3^{12} = (3^4)^x = 3^{4x}$$

$$\therefore x = 3$$

3. $a = 3$ 일 때, $(a^a)^{a^a} = 3^x$ 이다. x 의 값은?

- ① 3 ② 9 ③ 27 ④ 81 ⑤ 243

해설

$$\begin{aligned} a = 3 \text{ 을 대입하면} \\ (3^3)^{3^3} &= (3^3)^{27} = 3^{81} \\ \therefore x &= 81 \end{aligned}$$

4. $x - y = 2$ 이고 $a = 2^{3x}$, $b = 2^{3y}$ 일 때, $\frac{a}{b}$ 의 값은?

- ① 8 ② 16 ③ 32 ④ 64 ⑤ 128

해설

$$\frac{a}{b} = 2^{3x-3y} = 2^{3(x-y)} = 2^{3 \times 2} = 2^6 = 64$$

5. 다음 중 옳지 않은 것은?

① $a^6 \div a^3 = a^3$

② $b^6 \div b^{12} = \frac{1}{b^2}$

③ $a^8 \div a^2 \div a^2 = a^4$

④ $c^9 \div c^{10} = \frac{1}{c}$

⑤ $y^2 \div y^3 \times y^5 = y^4$

해설

① $a^6 \div a^3 = a^{6-3} = a^3$

② $b^6 \div b^{12} = b^{6-12} = b^{-6} = \frac{1}{b^6}$

③ $a^8 \div a^2 \div a^2 = a^{8-2-2} = a^4$

④ $c^9 \div c^{10} = c^{9-10} = c^{-1} = \frac{1}{c}$

⑤ $y^2 \div y^3 \times y^5 = y^{2-3+5} = y^4$

6. $(x^a)^4 = x^{16} \div x^a \div x$ 일 때, a 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$x^{4a} = x^{16-a-1} = x^{15-a}, \quad 4a = 15 - a$$

$$\therefore a = 3$$

7. $(3x^a)^b = 81x^{12}$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$$3^b = 81 = 3^4, b = 4$$

$$x^{ab} = x^{12}$$

$$ab = 12$$

$$a = 3$$

$$\therefore a + b = 7$$

8. 다음 등식이 성립할 때, $x+y+z$ 의 값을 구하여라.

$$\left(\frac{a^3b^yc^2}{2a^x}\right)^3 = za^6b^{12}c^6$$

▶ 답:

▷ 정답: $\frac{41}{8}$

해설

$$\frac{a^9b^{3y}c^6}{8a^{3x}} = za^6b^{12}c^6$$

$$z = \frac{1}{8}, y = 4, x = 1$$

$$x + y + z = \frac{41}{8}$$

9. $\left(\frac{2z^b}{x^5y^a}\right)^3 = \frac{8z^{18}}{x^cy^b}$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하면?

- ① 15 ② 17 ③ 21 ④ 23 ⑤ 25

해설

$\left(\frac{2z^b}{x^5y^a}\right)^3 = \frac{8z^{18}}{x^cy^b}$ 에서 좌변을 정리하면

$\frac{2^3(z^b)^3}{(x^5)^3(y^a)^3} = \frac{8z^{3b}}{x^{15}y^{3a}}$ 이므로 $\frac{8z^{3b}}{x^{15}y^{3a}} = \frac{8z^{18}}{x^cy^b}$ 의 지수를 비교한다.

$3b = 18$ 이므로 $b = 6$, $c = 15$ 이고

$b = 3a$ 에서 $6 = 3a$, $a = 2$ 이다.

$\therefore a+b+c = 2+6+15 = 23$

10. 다음 안에 알맞은 수는?

$$32^2 = 4^3 \times 2^{\square}$$

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 8

해설

$$32^2 = (2^5)^2 = 2^{10} = (2^2)^3 \times 2^4 = 4^3 \times 2^{\square}$$

$$\therefore \square = 4$$

11. $2^6 \div 2^a = \frac{1}{8}$, $8 \div 2^b \times 64 = 8$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 15

해설

$$2^6 = 2^a \times \frac{1}{8} = 2^{a-3} \text{ 이므로 } a = 9 \text{ 이다.}$$

$$2^{3-b+6} = 2^3 \text{ 이므로 } b = 6 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } a + b = 9 + 6 = 15 \text{ 이다.}$$

12. 다음 중 계산 결과가 나머지 넷과 다른 하나는?

① $(a^3)^2 \div a^2$

② $a^2 \times a^2$

③ $a \times a^3$

④ $a^2 + a^2 + a^2 + a^2$

⑤ $\frac{1}{2}a^2(a^2 + a^2)$

해설

④ $a^2 + a^2 + a^2 + a^2 = 4a^2$ 이고 ①, ②, ③, ⑤는 a^4 이므로 다른 하나는 ④이다.

13. $x = 5^3$ 라 할 때, $5^5 - 5^4 + 5^3$ 을 x 에 관한 식으로 나타낸 것은?

- ① $6x$ ② $10x$ ③ $21x$ ④ $25x$ ⑤ $31x$

해설

$$\begin{aligned} 5^5 - 5^4 + 5^3 &= 5^3 \times 5^2 - 5^3 \times 5 + 5^3 \\ &= 25x - 5x + x = 21x \end{aligned}$$

14. $a = 4^9$, $b = 5^{12} + 5$ 일 때, $a \times b$ 는 n 자리의 자연수이다. 이 때, n 의 값은?

- ① 12 ② 14 ③ 17 ④ 18 ⑤ 20

해설

$4^9(5^{12} + 5) = 2^{18} \times 5^{12} + 2^{18} \times 5$
 $= (2 \times 5)^{12} \times 2^6 + (2 \times 5) \times 2^{17}$
이 때 $(2 \times 5)^{12} \times 2^6 > (2 \times 5) \times 2^{17}$ 이므로
 $(2 \times 5) \times 2^{17}$ 은 자릿수를 고려할 때 생각하지 않는다.
 $(2 \times 5)^{12} \times 2^6 = 64 \times (2 \times 5)^{12}$
따라서 n 은 14 자리의 자연수이다.

15. 다음 식을 만족하는 x 의 값을 구하여라.

$$243^6 \div 27^x = 3^3$$

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$$\begin{aligned} 243^6 \div 27^x &= 3^3 \\ (3^5)^6 \div 3^{3x} &= 3^3 \\ 3^{30-3x} &= 3^3 \\ \therefore x &= 9 \end{aligned}$$

16. $12^5 = 2^m \times 3^n$ 일 때, $m + n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$$12^5 = (2^2 \times 3)^5 = 2^{10} \times 3^5$$

$$m = 10, n = 5$$

$$m + n = 15$$

17. 다음 보기 중 가장 큰 수를 골라라.

보기

㉠ $3 \times 2^2 \times 3^2$

㉡ $5^2 \times 3^3$

㉢ $2^3 \times 3^2 \times 7$

㉣ $3^2 \times (2^2)^3$

▶ 답:

▶ 정답: ㉡

해설

㉠ $3 \times 2^2 \times 3^2 = 3^3 \times 2^2 = 27 \times 4 = 108$

㉡ $5^2 \times 3^3 = 25 \times 27 = 675$

㉢ $2^3 \times 3^2 \times 7 = 8 \times 9 \times 7 = 504$

㉣ $3^2 \times (2^2)^3 = 9 \times 2^6 = 9 \times 64 = 576$

따라서 가장 큰 수는 ㉡이다.

18. x, y 가 짝수일 때, $(-4)^2 \div (-2)^y = (-2)^{x-6}$ 이다. $x+y$ 의 값을 구하면?

① 4

② 6

③ 8

④ 10

⑤ 12

해설

$$(-2^2)^2 \div (-2)^y = (-2)^{x-6}$$

2, $y, x-6$ 이 모두 짝수이므로

$$(-2^2)^2 = (2^2)^2 = 2^4,$$

$(-2)^y = 2^y, (-2)^{x-6} = 2^{x-6}$ 이다.

$$2^4 \div 2^y = 2^{4-y} = 2^{x-6}$$

$$4-y = x-6$$

$$\therefore x+y = 10$$

19. $(2^a \times 3^b \times 5^c)^m = 2^8 \times 3^{12} \times 5^{20}$ 일 때, m 의 최댓값을 구하여라. (단, a, b, c, m 은 자연수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$(2^a \times 3^b \times 5^c)^m = 2^8 \times 3^{12} \times 5^{20}$$

$$2^{am} \times 3^{bm} \times 5^{cm} = 2^8 \times 3^{12} \times 5^{20}$$

$$am = 8, \quad bm = 12, \quad cm = 20$$

모두 자연수의 곱이므로 8, 12, 20의 공약수가 곱해질 수 있다.

m 의 최댓값은 4이다.

20. 다음과 같이 6개의 식이 있다. 다음 식들 중 계산 결과가 같은 것을 찾아라.

$\textcircled{\text{㉠}} \frac{b^2a}{27} \times \frac{ba^2}{3}$	$\textcircled{\text{㉡}} \frac{a}{3} \left(\frac{ba}{3}\right)^2$	$\textcircled{\text{㉢}} \left\{\frac{1}{3}(a^2b)^2\right\}^2$
$\textcircled{\text{㉣}} \left(\frac{ab}{3}\right)^3 \times \frac{1}{3}$	$\textcircled{\text{㉤}} \frac{a}{9} \times \left(\frac{ab^2}{3}\right)^2$	$\textcircled{\text{㉥}} \frac{1}{a} \left(\frac{ab}{3}\right)^3$

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: ㉠

▷ 정답: ㉣

해설

$$\textcircled{\text{㉠}} \frac{b^2a}{27} \times \frac{ba^2}{3} = \frac{a^3b^3}{81}$$

$$\textcircled{\text{㉡}} \frac{a}{3} \left(\frac{ba}{3}\right)^2 = \frac{a^3b^2}{27}$$

$$\textcircled{\text{㉢}} \left(\frac{1}{3}a^2b^2\right)^2 = \frac{a^4b^4}{9}$$

$$\textcircled{\text{㉣}} \left(\frac{ab}{3}\right)^3 \times \frac{1}{3} = \frac{a^3b^3}{81}$$

$$\textcircled{\text{㉤}} \frac{a}{9} \times \frac{a^2b^4}{9} = \frac{a^3b^4}{81}$$

$$\textcircled{\text{㉥}} \frac{1}{a} \left(\frac{ab}{3}\right)^3 = \frac{a^2b^3}{27}$$

21. $3^{x+2} + 3^{x+1} + 3^x = 1053$ 일 때, x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\begin{aligned} 3^x = t \text{로 놓으면} \\ 3^2 \times 3^x + 3 \times 3^x + 3^x \\ = 9t + 3t + t = 1053 \\ 13t = 1053, t = 81 \\ 3^x = 81 = 3^4 \\ \therefore x = 4 \end{aligned}$$

22. $2^{100} = a$ 일 때, $4^{50} - 4^{49}$ 을 a 에 관한 식으로 나타내면?

- ① $\frac{1}{4}a$ ② $\frac{1}{2}a$ ③ $\frac{3}{4}a$ ④ $\frac{3}{2}a$ ⑤ $\frac{4}{3}a$

해설

$$\begin{aligned} 4^{50} - 4^{49} &= (2^2)^{50} - (2^2)^{49} \\ &= 2^{100} - 2^{98} \\ &= 2^{100} - 2^{100} \div 2^2 \\ &= 2^{100} \left(1 - \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{3}{4} \times 2^{100} \\ &= \frac{3}{4}a \end{aligned}$$

23. $\frac{3^x}{9^{-x+y}} = 27$, $\frac{25^{x+y}}{5^{3y}} = 625$ 일 때, $64^x \times 625^y$ 의 자리의 수를 구하면?

- ① 10 자리 ② 12 자리 ③ 17 자리
④ 20 자리 ⑤ 26 자리

해설

$$3^x = 27 \times 9^{-x+y} = 3^3 \times 3^{-2x+2y} = 3^{-2x+2y+3}$$

$$\therefore x = -2x + 2y + 3$$

$$25^{x+y} = 625 \times 5^{3y} = 5^4 \times 5^{3y} = 5^{3y+4}$$

$$\therefore 2x + 2y = 3y + 4$$

두 식을 연립하면

$$x = 5, y = 6$$

$$64^x \times 625^y = (2^6)^5 \times (5^4)^6 = 2^{30} \times 5^{24}$$

$$= (10)^{24} \times 2^6 = 64 \times 10^{24}$$

따라서 26 자리의 수이다.

24. $7^{2x-1} + (7^2)^x + 7^{2x-1} = 63$ 을 만족하는 x 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$$7^{2x-1} + (7^2)^x + 7^{2x-1} = 63 \text{ 에서}$$

$$7^{2x-1} + 7^{2x} + 7^{2x-1} = 63$$

$$7^{2x} \times \frac{1}{7} + 7^{2x} + 7^{2x} \times \frac{1}{7} = 63$$

$$7^{2x} \left(\frac{1}{7} + 1 + \frac{1}{7} \right) = 63$$

$$\frac{9}{7} \times 7^{2x} = 63$$

$$7^{2x} = 63 \times \frac{7}{9} = 7^2$$

$$\therefore x = 1$$

25. $\frac{2^{(5x-y)}}{4^{(x+2y)}} = \frac{1}{2}$, $\frac{3^{(7x+y)}}{27^{(x+2y)}} = 9$ 를 만족하는 x, y 에 대하여 xy 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

$$\frac{2^{(5x-y)}}{2^{2(x+2y)}} = \frac{1}{2}, \frac{3^{(7x+y)}}{3^{3(x+2y)}} = 3^2$$

$$5x - y - 2x - 4y = -1$$

$$3x - 5y = -1 \cdots \textcircled{A}$$

$$7x + y - 3x - 6y = 2$$

$$4x - 5y = 2 \cdots \textcircled{B}$$

$\textcircled{B} - \textcircled{A}$ 을 하면

$$x = 3, y = 2$$

$$\therefore xy = 3 \times 2 = 6$$