

1. f 는 임의의 자연수에 대하여 정의된 함수이고, 다음 두 조건을 만족한다.

$$\textcircled{\text{㉠}} \quad f(2n) = 2 \cdot f(n) (n = 1, 2, 3, \dots)$$
$$\textcircled{\text{㉡}} \quad f(2n + 1) = (-1)^n \cdot 2 (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

이

때, $f(32)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 64

해설

$$\begin{aligned} f(32) &= 2 \cdot f(16) = 2^2 \cdot f(8) = 2^3 \cdot f(4) \\ &= 2^4 \cdot f(2) = 2^5 \cdot f(1) = 2^5 \cdot f(2 \cdot 0 + 1) \\ &= 2^5 \cdot (-1)^0 \cdot 2 = 2^6 = 64 \end{aligned}$$

2. 다음 <보기> 중 서로 같은 함수끼리 짝지어진 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ $f(x) = x - 2, g(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$
㉡ $f(x) = |x|, g(x) = \sqrt{x^2}$
㉢ 정의역이 $X = \{-1, 1, 2\}$ 일 때,
 $f(x) = x^3, g(x) = 2x^2 + x - 2$

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉠, ㉡ ⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠은 $x = 2$ 에서 다른 함수이나
㉡, ㉢은 주어진 모든 정의역에서 같은 함수이다.

3. 다음 보기는 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수이다. 일대일 대응인 것을 모두 고르면?

<보기>

㉠ $f(x) = x + 1$

㉡ $f(x) = 1$

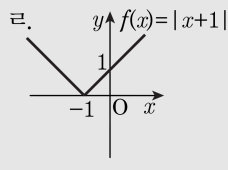
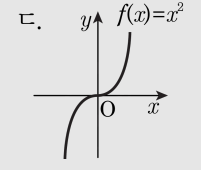
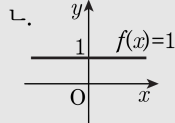
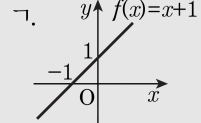
㉢ $f(x) = x^3$

㉣ $f(x) = |x + 1|$

- ① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉠, ㉣ ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉢, ㉣

해설

일대일 대응이 되려면 함수의 그래프가 증가함수 또는 감소함수이어야 한다.



따라서 일대일 대응인 것은 ㉠, ㉢ 이다.

4. 집합 $X = \{a, b, c\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 중 일대일대응이 아닌 함수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 21개

해설

X 에서 X 로의 함수의 총 개수에서
 X 에서 X 로의 일대일대응의 개수를
제외하면 된다.
 X 에서 X 로의 함수의 총 개수 : $3^3 = 27$
 X 에서 X 로의 일대일대응의 개수
: $3 \times 2 \times 1 = 6(\text{개})$
 $\therefore 27 - 6 = 21(\text{개})$

5. 집합 $A = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 A 에서 A 로 함수 f 중 $f(x) = f(-x)$ 를 만족시키는 것의 개수는 몇 개인가?

① 5 개 ② 6 개 ③ 7 개 ④ 8 개 ⑤ 9 개

해설

-1 이 대응할 수 있는 원소는 -1, 0, 1 의 3 가지
0 이 대응할 수 있는 원소는 -1, 0, 1 의 3 가지
1 이 대응할 수 있는 원소는
-1 이 대응한 원소 1 가지
따라서, 주어진 조건을 만족시키는
함수 f 의 개수는 $3 \times 3 \times 1 = 9$ (개)

6. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에서 X 로의 함수 $f : X \rightarrow X$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$f(x) \begin{cases} x+1 & (x \leq 3) \\ 1 & (x = 4) \end{cases}$$

이 때, $g : X \rightarrow X$ 에 대하여 $g(1) = 3$ 이고 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립할 때, 다음 중 옳은 것은?

- ① $g(2) < g(3) < g(4)$ ② $g(2) < g(4) < g(3)$
③ $g(3) < g(2) < g(4)$ ④ $g(3) < g(4) < g(2)$
⑤ $g(4) < g(3) < g(2)$

해설

$f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 4, f(4) = 1$ 임을 이용하여
 $(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(3) = 4$
 $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(2) \quad (\therefore f \circ g = g \circ f)$
 $\therefore g(2) = 4$
 $(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(4) = 1$
 $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(3)$
 $\therefore g(3) = 1$
 $(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(1) = 2$
 $(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(4)$
 $\therefore g(4) = 2$
 $\therefore g(3) < g(4) < g(2)$

7. 함수 $f(x) = x + 1$ 라 할 때, $f^{10}(2)$ 의 값을 구하여라. (단, $f^2 = f \circ f$, $f^n = f^{n-1} \circ f$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$$\begin{aligned} f^2(x) &= (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x+1) \\ &= (x+1)+1 = x+2 \\ f^3(x) &= (f^2 \circ f)(x) = f^2(f(x)) = f^2(x+1) \\ &= (x+1)+2 = x+3 \\ f^4(x) &= (f^3 \circ f)(x) = f^3(f(x)) = f^3(x+1) \\ &= (x+1)+3 = x+4 \\ &\quad \dots \end{aligned}$$

$$f^n(x) = x+n$$

$$\therefore f^{10}(2) = 2+10 = 12$$

8. 두 함수 $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = -2x + k$ 에 대하여 $(f \circ g)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ 이 성립할 때 k 값을 구하면?

- ① $-\frac{1}{2}$ ② -1 ③ $-\frac{3}{2}$ ④ -2 ⑤ $-\frac{5}{2}$

해설

$$(f \circ g)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} = (g \circ f)^{-1} \text{ 이므로}$$

$$f \circ g = g \circ f \text{ 이 성립한다.}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3(-2x + k) + 1$$

$$= -6x + 3k + 1$$

$$(g \circ f)(x) = -2(3x + 1) + k = -6x + k - 2$$

$$\therefore 3k + 1 = k - 2$$

$$\therefore k = -\frac{3}{2}$$

9. 함수 $f(x) = [x]^2 - 2[x] - 3$ 에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

보기

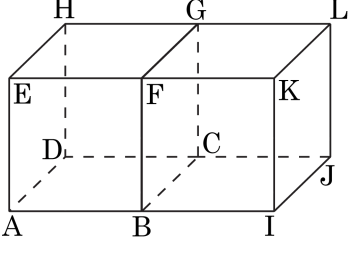
- ㉠ $f\left(\frac{1}{2}\right) = -3$
- ㉡ 치역은 $\{x \mid x \geq -3\}$ 이다.
- ㉢ $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1)f(x_2)$ 이다.

- ① ㉠ ② ㉢ ③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

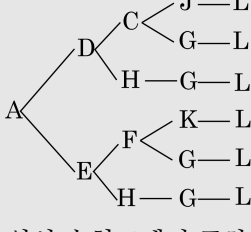
- ㉠ $\left[\frac{1}{2}\right] = 0$ 이므로 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -3$
- ㉡ $f(x) = [x]^2 - 2[x] - 3 = ([x] - 1)^2 - 4$ 이므로 $f(x) \geq -4$ 따라서 치역은 $\{f(x) \mid f(x) \geq -4, f(x) \text{는 정수}\}$ 이다.
- ㉢ [반례] $x_1 = -1, x_2 = 3$ 일 때
 $f(x_1) = f(-1) = [-1]^2 - 2[-1] - 3 = 0$
 $f(x_2) = f(3) = [3]^2 - 2[3] - 3 = 0$ 이므로
 $x_1 < x_2$ 이지만 $f(x_1) = f(x_2)$ 이다.
이상에서 옳은 것은 ㉠뿐이다.

10. 두 개의 정육면체가 서로 붙어 있는 아래 그림에서 A 에서부터 L 까지 모서리를 따라 최단 거리로 가는 방법 중 B 를 통과하지 않는 방법의 수를 구하면?



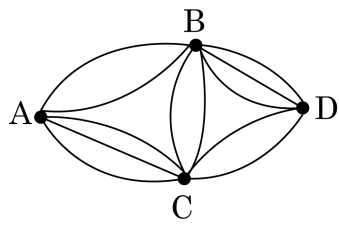
- ① 4 ② 6 ③ 8 ④ 12 ⑤ 16

해설



위의 수형도에서 구하는 방법의 수는 6 가지이다.

11. A, B, C, D 네 지점 사이에 오른쪽그림과 같은 도로망이 있다. A 에서 D 까지의 경로는 모두 몇 가지인가? (단, 동일 지점은 많아야 한번만 지난다.)



▶ 답: 가지

▶ 정답 : 38가지

해설

A 에서 D 까지의 경로는

$A \rightarrow B \rightarrow D$ 의 경우 : $2 \times 3 = 6$ (가지)

$A \rightarrow C \rightarrow D$ 의 경우: $3 \times 2 = 6$ (가지)

$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ 의 경우 :

$$2 \times 2 \times 2 = 8 \text{ (가지)}$$

$A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D$ 의 경우 :

$$3 \times 2 \times 3 = 18 \text{ (가지)}$$

따라서 구하는 가지수는

$$6 + 6 + 8 + 18 = 38 \text{ (가지)}$$

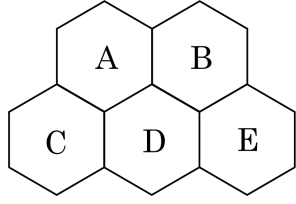
12. 100원짜리, 50원짜리, 10원짜리 세 종류의 동전으로 200원을 지불할 수 있는 경우의 수는 몇 가지인가? (모든 종류의 동전을 사용할 필요는 없다.)

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

(100원짜리, 50원짜리, 10원짜리) 각각의 순서쌍을 구하면
(2, 0, 0), (1, 2, 0), (1, 1, 5), (1, 0, 10), (0, 4, 0), (0, 3, 5), (0, 2, 10),
(0, 1, 15), (0, 0, 20)
∴ 9가지

13. 다음 그림의 A, B, C, D, E 에 다섯 가지의 색을 칠하여 그 경계를 구분하는 방법의 수는? (단, 같은 색을 여러 번 사용할 수 있다.)



- ① 530 ② 540 ③ 550 ④ 560 ⑤ 570

해설

주어진 그림에서 D 는 A, B, C, E 와 모두 접하므로 D 에 칠한 색은 다른 곳에 칠하면 안 된다.

따라서 $D \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow E$ 의 순서로 색을 칠한다고 하면 D 는 5 가지, C 는 4 가지, A 는 3 가지, B 는 3 가지, E 는 3 가지의 색을 칠할 수 있으므로 구하는 방법의 수는

$$5 \times 4 \times 3 \times 3 \times 3 = 540 \text{ (가지)}$$

14. 0, 1, 2, 3, 4에서 서로 다른 4개의 숫자를 택하여 만들 수 있는 네 자리의 정수 중에서 4의 배수의 개수는?

- ① 12
- ② 18
- ③ 24
- ④ 30
- ⑤ 36

해설

끝의 두자리가 4 의 배수가 되어야 한다.
⇒

--	--

12,

--	--

20,

--	--

24,

--	--

32,

--	--

40,

--	--

04
각각의 경우를 구해 더한다.
∴ 4 + 6 + 4 + 4 + 6 + 6 = 30

15. 다음 등식을 만족시키는 n 의 값을 구하여라.

$${}_{n+2}C_4 = 11 {}_nC_2$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $n = 10$

해설

$${}_{n+2}C_4 = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1},$$

$${}_nC_2 = \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1} \text{ 이므로 조건식은}$$

$$\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 11 \times \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1}$$

$n \geq 2$ 이므로 양변을 $n(n-1)$ 로 나누면

$$(n+2)(n+1) = 12 \cdot 11$$

$$\therefore (n-10)(n+13) = 0$$

$$n+13 \neq 0 \text{ 이므로 } n-10 = 0$$

$$\therefore n = 10$$

16. $f(x) = 3x + 2$ 에서 $g(x)$ 가 $(g \circ f)^{-1}(x) = 3x$ 를 만족시킨다고 할 때, $g(2)$ 의 값은?

① 1

② 0

③ $\frac{1}{3}$

④ 3

⑤ 6

해설

$$(g \circ f)^{-1}(x) = 3x \text{ 이므로 } (g \circ f)(3x) = x$$

$$3x = t \text{ 로 치환하면 } x = \frac{1}{3}t \Rightarrow (g \circ f)(t) = \frac{1}{3}t$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x + 2) = \frac{1}{3}x$$

$$3x + 2 = 2 \text{ 일 때 } x = 0$$

$$\therefore g(2) = 0$$

17. 일차함수 $f(x) = ax + b(a \neq 0)$ 의 그래프를 $y = x$ 에 대칭이동한 그래프의 함수를 $g(x)$ 라고 하자. 두 함수 f, g 가 $f(2) = 5, g(2) = 1$ 을 만족할 때, $f(4)$ 의 값은?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

함수 $f(x) = ax + b(a \neq 0)$ 의 그래프를
 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 그래프는
 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프이다.
따라서 $g(2) = 1$ 에서 $f^{-1}(2) = 1$
 $\therefore f(1) = 2$
 $f(1) = a + b = 2, f(2) = 2a + b = 5$
위의 식에서 $a = 3, b = -1$
 $\therefore f(x) = 3x - 1$
 $\therefore f(4) = 3 \cdot 4 - 1 = 11$

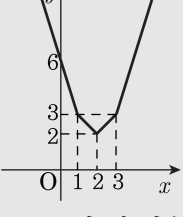
18. 함수 $y = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3|$ 의 최솟값을 m , 그 때의 x 의 값을 n 이라 할 때, 상수 m, n 의 곱 mn 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$y = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3|$ 에서
(i) $x \geq 3$ 일 때, $y = x - 1 + x - 2 + x - 3 = 3x - 6$
(ii) $2 \leq x < 3$ 일 때, $y = x - 1 + x - 2 - (x - 3) = x$
(iii) $1 \leq x < 2$ 일 때, $y = x - 1 - (x - 2) - (x - 3) = -x + 4$
(iv) $x < 1$ 일 때, $y = -(x - 1) - (x - 2) - (x - 3) = -3x + 6$
따라서 $y = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3|$ 의 그래프는 다음 그림과 같고



$x = 2$ 일 때 최솟값이 2이므로 $m = 2, n = 2$
 $\therefore mn = 4$

19. something의 9 개의 문자를 일렬로 나열할 때, *e*와 *i* 사이에 3 개의 문자가 들어 있는 경우의 수는?

- ① 8400
- ② 16800
- ③ 33600
- ④ 50400
- ⑤ 144000

해설

3 개의 문자를 선택하여 배열하는 경우의 수 : ${}_7P_3$
e와 i 를 배열하는 방법의 수 : 2
e 와 i 그리고 3 개의 문자를 하나로 보고 나머지 문자와 같이 배열하는 방법의 수 : 5!
 ${}_7P_3 \times 2 \times 5! = 50400$

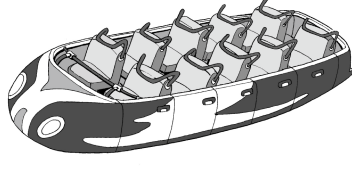
20. 어느 회사에서 사원 연수를 위하여 네 지역 서울, 부산, 광주, 대구에서 각각 3 명씩 모두 12 명의 사원을 선발하였다. 같은 지역에서 선발된 사원끼리는 같은 조에 속하지 않도록 각 지역에서 한 명씩 선택하여 4 명으로 구성된 3 개의 조로 나누는 방법의 수는?

① 80 ② 144 ③ 216 ④ 240 ⑤ 288

해설

어느 한 지역의 세 사람을 각 1 명씩으로 하는 세 조를 생각하자.
나머지 세 지역의 사람들을 세 조에 배정하면 되므로
 $3! \times 3! \times 3! = 6^3 = 216$

21. 남학생 2명과 여학생 2명이 함께 놀이 공원에 가서 어느 놀이기구를 타려고 한다. 이 놀이기구는 그림과 같이 한 줄에 2 개의 의자가 있고 모두 5 줄로 되어 있다. 남학생 1명과 여학생 1명이 짝을 지어 2 명씩 같은 줄에 앉을 때, 4 명이 모두 놀이기구의 의자에 앉는 방법의 수를 구하여라.



▶ 답 : 가지

▷ 정답 : 80 가지

해설

남학생을 A, B 라 하고, 여학생을 a, b 라 하면
짝을 이루는 방법은 $(Aa, Bb), (Ab, Ba)$ 두 가지가
있다. 이때, 5 줄 중 2 줄에 앉아야 하고 각 줄에서
남학생과 여학생이 자리를 바꿀 수 있으므로
 $2 \times {}_5C_2 \times 2 \times 2 = 80$

22. 십이각형의 서로 다른 대각선의 교점은 최대 몇 개인가?

- ① 125 ② 175 ③ 275 ④ 385 ⑤ 495

해설

십이각형에서 4 개의 점을 선택하면 대각선이 한 개가 만들어진다. 따라서 대각선의 교점의 최댓값은 십이각형의 12 개의 꼭지점에서 4 개의 점을 선택하는 가지 수와 같다.
 $\therefore {}_{12}C_4 = 495$

23. 8 명이 타고 있는 승강기가 2 층으로부터 11 층까지 10 개 층에서 설 수 있다고 한다. 이때, 각각 4 명, 2 명, 2 명씩 3 개 층에서 모두 내리게 되는 방법의 수는?

① 75600

② 84400

③ 92400

④ 12450

⑤ 151200

해설

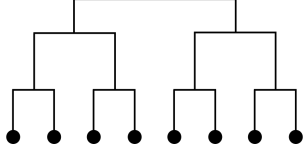
8 명을 4 명, 2 명, 2 명씩 나누는 방법의 수는

${}_8C_4 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!}$ 이고,

이와 같이 3 개층에 내리게 되는 방법의 수는 ${}_{10}P_3$ 이다.

$\therefore {}_8C_4 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} \times {}_{10}P_3 = 151200$

24. 세계 피파 랭킹 1위에서 8위까지의 총 8개 나라가 참가한 축구 경기에서 그림과 같은 토너먼트로 대진표를 만든다고 한다. 두 나라가 경기를 하면 랭킹이 높은 나라가 반드시 이긴다고 할 때, 랭킹 4위인 나라가 결승전에 나갈 수 있도록 대진표를 만드는 방법의 수는?

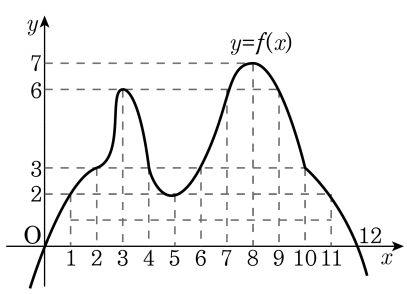


- ① 24 ② 28 ③ 32 ④ 36 ⑤ 42

해설

4 명씩 두 조로 나누어 생각해 보면 결승전에 나가려면 1 ~ 3 위 팀과는 같은 조에 들어가면 안 된다. 두 조는 구별이 되지 않으므로 5 ~ 8 위 팀중 한 팀을 골라 1 ~ 3 위 팀 조에 넣으면 두 조가 완성이 된다. $\Rightarrow {}_4C_1 = 4$
 이제 각 조 내에서 배열하는 방법 수는
 $\Rightarrow {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} = 3 \therefore 4 \times 3 \times 3 = 36$

25. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가
 다음 그림과 같다. 함수 $g(x)$
 가 $g(x) = (f \circ f)(x + 2)$ 일
 때, $g(x) = 6$ 을 만족시키는
 실수 x 의 개수는 몇 개인가?
 (단, $x < 0$ 또는 $x > 12$ 일 때,
 $f(x) < 0$ 이다.)



- ① 3 개 ② 4 개 ③ 5 개 ④ 6 개 ⑤ 7 개

해설

$g(x) = 6$ 에서 $(f \circ f)(x + 2) = 6$ 이므로,
 $f(f(x + 2)) = 6$
 $x + 2 = t$ 로 놓으면 $f(f(t)) = 6$
 $\therefore f(t) = 3$ 또는 $f(t) = 7$ 또는 $f(t) = 9$
 그런데 $f(t) \leq 7$ 이므로
 $f(t) = 3$ 또는 $f(t) = 7$
 (i) $f(t) = 3$ 일 때,
 $t = 2$ 또는 $t = 4$ 또는 $t = 6$ 또는 $t = 10$
 $\therefore x = 0$ 또는 $x = 2$ 또는 $x = 4$ 또는 $x = 8$
 (ii) $f(t) = 7$ 일 때, $t = 8$
 $\therefore x = 6$
 (i) , (ii) 에서
 실수 x 의 값은 $0, 2, 4, 6, 8$ 의 5 개이다.