1. 다음 중 $(x-y)^2(x+y)^2$ 을 전개한 식은?

① $x^4 - y^4$

② $x^2 - y^2$

③ $x^4 - 2x^2y^2 + y^4$

④ $x^4 - x^2y^2 + y^4$

⑤ $x^4 - 4x^2y^2 + y^4$

해설

$$\begin{aligned}(x-y)^2(x+y)^2 &= [(x-y)(x+y)]^2 \\ &= (x^2 - y^2)^2 \\ &= x^4 - 2x^2y^2 + y^4\end{aligned}$$

2. x 에 대한 다항식 $x^3 - 2x^2 - px + 2$ 가 $x - 2$ 로 나누어떨어지도록 상수 p 의 값을 정하면?

① 1 ② -1 ③ 2 ④ -2 ⑤ 3

해설

$x^3 - 2x^2 - px + 2 = f(x)$ 로 놓으면 $f(x)$ 가 $x - 2$ 로 나누어떨어지려면

$f(2) = 0$ 이므로,

$$f(2) = 8 - 8 - 2p + 2 = 0$$

$$\therefore p = 1$$

3. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

- ① $a \geq 0, b < 0$ ② $a > 0, b > 0$ ③ $a \geq 0, b > 0$
④ $a < 0, b < 0$ ⑤ $a \leq 0, b < 0$

해설

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$ 가 성립할 조건은 $b < 0$ 이고 $a \geq 0$ 일 때이다.

4. 이차함수 $y = x^2 - 2(k-3)x + 4$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수 k 의 값의 범위는?

① $k < 1$

② $1 < k < 3$

③ $k < 3$

④ $3 < k < 5$

⑤ $k < 1$ 또는 $k > 5$

해설

이차함수 $y = x^2 - 2(k-3)x + 4$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2 - 2(k-3)x + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D > 0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = (k-3)^2 - 4 > 0$$

$$k^2 - 6k + 5 > 0, (k-1)(k-5) > 0$$

$$\therefore k < 1 \text{ 또는 } k > 5$$

5. $(4x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 4x + 1) \div (x^2 - x + 1)$ 을 계산 하였을 때, 몫과 나머지의 합을 구하면?

- ① $4x^2 - 6x + 1$ ② $4x^2 - 7x + 3$ ③ $4x^2 - 4x + 5$
④ $4x^2 - 8x + 2$ ⑤ $4x^2 - 6x + 7$

해설

직접 나누어서 구한다.

몫: $4x^2 - x - 2$, 나머지: $-5x + 3$

$\therefore$ 몫과 나머지의 합은 $4x^2 - 6x + 1$

6. $\frac{2x+1}{x^3-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$ 가 $x \neq 1$ 인 모두 실수 x 에 대해 항상 성립 하도록 a, b, c 를 구할 때, $a+b+c$ 의 값은?

- ① 2 ② -2 ③ 1 ④ -1 ⑤ 0

해설

우변의 분모를 통분하면

$$\frac{a(x^2+x+1) + (bx+c)(x-1)}{x^3-1}$$

$$= \frac{(a+b)x^2 + (a-b+c)x + (a-c)}{x^3-1}$$

$$\therefore \frac{2x+1}{x^3-1} = \frac{(a+b)x^2 + (a-b+c)x + (a-c)}{x^3-1}$$

분자의 계수를 비교하면

$$a+b=0, a-b+c=2, a-c=1$$

세 식을 연립하여 풀면 $a=1, b=-1, c=0$

$$\therefore a+b+c=0$$

7. 다항식 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 6$ 을 $x - 2$, $x - 1$ 로 나누었을 때의 나머지를 각각 a, b 라 할 때, $a + b$ 의 값은?

① -8 ② -2 ③ -16 ④ 4 ⑤ 2

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-2)Q(x) + a \\ f(x) &= (x-1)Q'(x) + b \\ f(2) = 4 = a, \quad f(1) = -2 = b \\ \therefore a + b &= 2 \end{aligned}$$

8. $x = \sqrt{3} + 2i$, $y = \sqrt{3} - 2i$ 일 때, $x^2 + xy + y^2$ 의 값을 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

㉠ 5

㉡ 7

㉢ $2\sqrt{3} + 4i$

㉣ 12

㉤ $12 + 2\sqrt{3}i$

해설

$$x + y = 2\sqrt{3},$$

$$xy = (\sqrt{3} + 2i)(\sqrt{3} - 2i) = 3 - 4i^2 = 7 \text{ 이므로}$$

$$x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy = 12 - 7 = 5 \text{ 이다.}$$

9. $x = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $x^2 - x + 1$ 의 값은?

① -1

② 0

③ 1

④ $\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$

⑤ $\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$

해설

$$x = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} \text{ 의 양변에 } 2 \text{ 를 곱하면 } 2x = 1 - \sqrt{3}i$$

$$\text{그러므로 } 2x - 1 = -\sqrt{3}i$$

$$\text{이 식의 양변을 제곱하면 } 4x^2 - 4x + 1 = -3$$

$$\text{즉, } 4x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\text{따라서, } x^2 - x + 1 = 0$$

10. x 에 대한 일차방정식 $(a^2 + 3)x + 1 = a(4x + 1)$ 의 해가 무수히 많을 때, a 의 값은?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$(a^2 + 3 - 4a)x = a - 1$$

모든 x 에 대해 성립하려면
 $a^2 - 4a + 3 = 0$, $a - 1 = 0$
공통근 : $a = 1$

11. $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$ 을 풀면?

- ① $x = -\sqrt{2}$ ② $x = \sqrt{2}$ ③ $x = 0$
④ $x = 4 - \sqrt{2}i$ ⑤ $x = 6$

해설

$$x^2 - 2\sqrt{2}x + (\sqrt{2})^2 = (x - \sqrt{2})^2 = 0$$
$$\therefore x = \sqrt{2}$$

12. 방정식 $x^6 - 1 = 0$ 의 해가 아닌 것은?

① -1

② 1

③ $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$

④ $\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$

⑤ $\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$

해설

$$x^6 - 1 = (x^3 + 1)(x^3 - 1) = (x + 1)(x^2 - x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$
$$\Rightarrow x = -1, 1, \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

13. x 에 대한 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 3$ 이 $x^2 + 1$ 로 나누어떨어질 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^3 + ax^2 + bx + 3 = (x^2 + 1)(x + k)$ 라 할 수 있다.
여기에서 상수항을 비교하면 $k = 3$
 $x^3 + ax^2 + bx + 3 = (x^2 + 1)(x + 3)$
 $= x^3 + 3x^2 + x + 3$
 $\therefore a = 3, b = 1$ 이므로 $a + b = 4$

해설

$x^3 + ax^2 + bx + 3 = (x^2 + 1)Q(x)$
 $x^2 = -1$ 을 대입하면
 $-x - a + bx + 3 = 0, (b - 1)x + (3 - a) = 0$
 x 에 대한 항등식이므로
 $a = 3, b = 1$
 $\therefore a + b = 4$

14. 다음 식 $(3x^2 - x + 2)(4x^3 - 5x^2 + x + 1)^5$ 을 전개했을 때, 계수들의 총합은?

- ① 4 ② -32 ③ -64 ④ 32 ⑤ 64

해설

다항식의 계수들의 총합을 구할 경우

$x = 1$ 을 대입한다.

$$(3 - 1 + 2)(4 - 5 + 1 + 1)^5 = 4 \times 1 = 4$$

15. 다항식 $f(x)$ 를 $x+1$, $x+2$ 로 나누었을 때의 나머지가 각각 3, -1 이다. 이때, $f(x)$ 를 x^2+3x+2 로 나눌 때의 나머지는?

① $2x+5$

② $-3x$

③ $3x+6$

④ $4x+7$

⑤ $5x+8$

해설

다항식 $f(x)$ 를 x^2+3x+2 , 즉 $(x+1)(x+2)$ 로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ 라고 하면

$f(x) = (x+1)(x+2)Q(x) + ax + b$ 로 놓을 수 있다.

문제의 조건에서 $f(-1) = 3$, $f(-2) = -1$ 이므로

$$f(-1) = -a + b = 3$$

$$f(-2) = -2a + b = -1$$

이것을 풀면 $a = 4$, $b = 7$

따라서, 구하는 나머지는 $4x+7$

16. $(a^2 - 1)(b^2 - 1) - 4ab$ 를 인수분해하면?

① $(ab - a + b - 1)(ab - a - b - 1)$

② $(ab - a + b + 1)(ab - a - b + 1)$

③ $(ab + a - b + 1)(ab - a + b - 1)$

④ $(ab + a + b - 1)(ab - a - b - 1)$

⑤ $(ab + a + b + 1)(ab + a - b - 1)$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1 - 4ab \\ &= (a^2b^2 - 2ab + 1) - (a^2 + 2ab + b^2) \\ &= (ab - 1)^2 - (a + b)^2 \\ &= (ab + a + b - 1)(ab - a - b - 1)\end{aligned}$$

17. a, b, c 가 삼각형의 세 변의 길이를 나타낼 때, $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = 0$ 을 만족하는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인가?

- ① $\angle B = 120^\circ$ 인 둔각삼각형 ② 직각삼각형
③ $\angle B = 150^\circ$ 인 둔각삼각형 ④ 이등변삼각형
⑤ $\angle A = 35^\circ$ 인 예각삼각형

해설

$$\begin{aligned} & a^2b - a^2c + b^2c - b^2a + c^2a - c^2b \\ &= a^2(b-c) + a(c+b)(c-b) + bc(b-c) \\ &= (b-c) \{a^2 + (c+b)a + bc\} \\ &= (b-c)(a+b)(a+c) \\ \therefore b &= c \quad (\because a+b \neq 0, a+c \neq 0) \end{aligned}$$

18. 가로, 세로의 길이가 각각 8cm, 6cm 인 직사각형에서 가로의 길이는 x cm 만큼 줄이고, 세로의 길이는 $2x$ cm 만큼 길게 하여 얻은 직사각형의 넓이를 $y\text{cm}^2$ 라고 할 때, y 를 최대가 되게 하는 x 의 값은?

- ① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{15}{2}$ ③ $\frac{25}{2}$ ④ $\frac{31}{5}$ ⑤ $\frac{16}{5}$

해설

줄어든 가로의 길이는 $(8-x)\text{cm}$,
늘어난 세로의 길이는 $(6+2x)\text{cm}$ 에서

$$\begin{aligned}y &= (8-x)(6+2x) \\ &= 48 + 10x - 2x^2 \\ &= -2\left(x^2 - 5x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4}\right) + 48 \\ &= -2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{121}{2}\end{aligned}$$

따라서 $x = \frac{5}{2}$ 일 때, 최댓값 $\frac{121}{2}$ 을 갖는다.

19. 삼차방정식 $x^3 - 7x^2 + px + q = 0$ 의 한 근은 $3 + \sqrt{2}$ 이다. 유리수 p, q 의 값을 구했을 때, $p + q$ 의 값은?

- ① 6 ② 10 ③ -2 ④ -1 ⑤ 1

해설

$$x^3 - 7x^2 + px + q = 0 \text{의 세 근은 } 3 + \sqrt{2}, 3 - \sqrt{2}, \alpha$$

$$\text{세 근의 합 : } \alpha + (3 + \sqrt{2}) + (3 - \sqrt{2}) = 7$$

$$\therefore \alpha = 1$$

$$p = (3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) + \alpha(3 - \sqrt{2}) + \alpha(3 + \sqrt{2}) = 7 + 6 \quad \therefore p = 13$$

$$-q = (3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) \cdot 1 = 7$$

$$\therefore q = -7$$

$$\therefore p + q = 13 - 7 = 6$$

20. 삼차방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\omega^3 = 1$

② $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

③ $\omega^2 = \bar{\omega}$

④ $\omega^2 + \omega = -1$

⑤ $1 + \omega^2 + \omega^4 = 1$

해설

① $\omega^3 = 1$ (○)

② $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ (○)

③ $x^2 + x + 1 = 0$ 의 두 근이

$\omega, \bar{\omega}$ 이므로

$\omega + \bar{\omega} = -1$

$\bar{\omega} = -(1 + \omega) = -(-\omega^2) = \omega^2$

$\therefore \bar{\omega} = \omega^2$ (○)

④ $\omega^2 + \omega = -1$ (○)

⑤ $1 + \omega^2 + (\omega^3) \cdot \omega = \omega^2 + \omega + 1 = 0 \neq 1$ (×)