

1. $2x^2 + xy - 3y^2 + 5x + 5y + 2$ 를 인수분해 하면 $(x + ay + b)(2x + cy + d)$ 이다. 이 때, $a + b + c + d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\begin{aligned} & 2x^2 + xy - 3y^2 + 5x + 5y + 2 \\ &= 2x^2 + (y + 5)x - 3y^2 + 5y + 2 \\ &= 2x^2 + (y + 5)x - (y - 2)(3y + 1) \\ &= \{x - (y - 2)\}\{2x + (3y + 1)\} \\ &= (x - y + 2)(2x + 3y + 1) \\ \therefore a &= -1, b = 2, c = 3, d = 1 \end{aligned}$$

2. $N = 69^3 + 3 \cdot 69^2 + 3 \cdot 69 + 1$ 의 양의 약수의 개수는?

- ① 6개 ② 12개 ③ 20개 ④ 24개 ⑤ 64개

해설

$$\begin{aligned} N &= 69^3 + 3 \cdot 69^2 + 3 \cdot 69 + 1 \\ &= (69 + 1)^3 = (2 \cdot 3 \cdot 7)^3 \end{aligned}$$

따라서 N 의 양의 약수는 개수는 $4^3 = 64$

3. 두 다항식 $x^3 + 2x^2 - x - 2$,
 $(x - 1)(3x^2 + ax + 2a)$ 의 최대공약수가 이차식이 되도록 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -3$

해설

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x + 2)(x + 1)$$

$\therefore 3x^2 + ax + 2a$ 는

$x + 2$ 또는 $x + 1$ 을 인수로 가져야 한다.

$f(x) = 3x^2 + ax + 2a$ 로 놓을 때

$x + 2$ 가 인수이면 $f(-2) = 12 - 2a + 2a = 12$ 가 되어 적합하지 않다.

$\therefore x + 1$ 을 인수로 갖는다.

$x + 1$ 이 인수이면 $f(-1) = 3 - a + 2a = 3 + a = 0$

$\therefore a = -3$

4. 복소수 $(1 - xi)(1 - i)$ 가 순허수가 되도록 실수 x 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 1$

해설

$(1 - xi)(1 - i) = (1 - x) + (-1 - x)i$
순허수이려면 실수부가 $0 \Rightarrow 1 - x = 0,$
 $x = 1$

5. $x = 1 + \sqrt{2}i$, $y = 1 - \sqrt{2}i$ 일 때, $x^3 - y^3$ 의 값을 구하면?

① $2\sqrt{2}i$

② $-2\sqrt{2}i$

③ $\sqrt{2}i$

④ $-\sqrt{2}i$

⑤ $2i$

해설

$$x^3 - y^3 = (x - y)^3 + 3xy(x - y)$$

$$x - y = 2\sqrt{2}i, xy = (1 + \sqrt{2}i)(1 - \sqrt{2}i) = 3$$

$$\begin{aligned} x^3 - y^3 &= (2\sqrt{2}i)^3 + 3 \cdot 3 \cdot (2\sqrt{2}i) \\ &= -16\sqrt{2}i + 18\sqrt{2}i \\ &= 2\sqrt{2}i \end{aligned}$$

6. x 에 대한 방정식 $ix^2 + (1+i)x + 1 = 0$ 의 해를 구하여라. (단, $x \neq i$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

양변에 $-i$ 를 곱하면

$$(-i) \cdot ix^2 - i(1+i)x - i = 0$$

$$x^2 + (1-i)x - i = 0$$

$$(x-i)(x+1) = 0$$

$$x \neq i \text{이므로 } x = -1$$

7. 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근의 합이 2, 곱이 3일 때, 이차방정식 $f(2x+1) = 0$ 의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

$f(\alpha) = 0, f(\beta) = 0$ 이고 조건에서

$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = 3$

$f(2x+1) = 0$ 에서

$2x+1 = \alpha$ 또는 $2x+1 = \beta$

$\therefore x = \frac{\alpha-1}{2}$ 또는 $x = \frac{\beta-1}{2}$

따라서 $f(2x+1) = 0$ 의 근은 $\frac{\alpha-1}{2}, \frac{\beta-1}{2}$

이때 두 근의 합 $\frac{\alpha-1}{2} + \frac{\beta-1}{2}$

$= \frac{\alpha+\beta-2}{2} = \frac{2-2}{2} = 0$

8. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 2kx + 2k + 3 = 0$ 에 두 근이 모두 음수가 되게 하는 실수 k 의 값의 범위를 정하면 ?

① $k \geq 3$

② $-\frac{3}{2} < k \leq -1$

③ $k < -\frac{3}{2}$

④ $\frac{3}{2} < k \leq 2$

⑤ $k < \frac{3}{2}$

해설

두 근이 모두 음수이면

① $D/4 \geq 0$ 에서 $k \leq -1, k \geq 3$

② 두 근의 합 $2k < 0, k < 0$

③ 두 근의 곱 $k > -\frac{3}{2}$

따라서 $-\frac{3}{2} < k \leq -1$

9. 이차함수 $y = x^2 + 2ax + a - 3$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : $-\frac{11}{4}$

해설

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 2ax + a - 3 \\ &= (x + a)^2 - a^2 + a - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{최솟값 } M &= -a^2 + a - 3 \\ &= -(a^2 - a) - 3 \\ &= -\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} - 3 \\ &= -\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{11}{4} \end{aligned}$$

따라서 m 의 최댓값은 $-\frac{11}{4}$ 이다.

10. 둘레의 길이가 20 cm 인 철사를 구부려서 부채꼴 모양을 만들려고 한다. 부채꼴의 넓이가 최대가 되도록 하는 부채꼴의 반지름을 a , 이때 부채꼴의 넓이를 b 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

부채꼴의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}a(20 - 2a) = a(10 - a) = -a^2 + 10a \\ &= -(a^2 - 10a + 25) + 25 \\ &= -(a - 5)^2 + 25 \end{aligned}$$

$$a = 5, b = 25$$

따라서 $a + b = 30$ 이다.

11. 지면으로부터 초속 40m 로 똑바로 위로 쏘아 올린 물체의 x 초 후의 높이를 y m 라고 하면 $y = -5x^2 + 40x$ 의 관계가 성립한다. 이 물체가 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간과 그 때의 높이를 구하여라.

▶ 답 : 초

▶ 답 : m

▷ 정답 : 4초

▷ 정답 : 80m

해설

$y = -5x^2 + 40x$ 에서 $y = -5(x - 4)^2 + 80$ 이다.
따라서 $x = 4$ 일 때, y 는 최댓값 80 을 갖는다.

12. 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

- ㉠ $a > b$ 이면 $a - c > b - c$

㉡ $a > b, c < 0$ 이면 $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

㉢ $a > b > 0, c > d > 0$ 이면 $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$

- ① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

- ㉠. $a - c > b - c$ 에서
양변에 c 를 더하면 $a > b$ (참)
- ㉡. $\frac{a}{c} < \frac{b}{c} \Leftrightarrow \frac{1}{c}(a - b) < 0$
 $\Leftrightarrow c < 0$ 그리고 $a > b$ 또는
 $c > 0$ 그리고 $a < b$ (참)
- ㉢. 양수일 때 분자가 클수록,
분자가 작을수록 값이 크다. (참)

13. 연립부등식 $\begin{cases} x+a \leq 3 \\ 3x-1 \geq 2x+b \end{cases}$ 의 해가 $-1 \leq x \leq 2$ 일 때, ab 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 상수)

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

주어진 식을 정리하면

$$\begin{cases} x \leq 3-a \\ x \geq b+1 \end{cases}$$

$$b+1 \leq x \leq 3-a$$

$$b+1 = -1, 3-a = 2$$

$$\therefore b = -2, a = 1$$

$$\therefore ab = 1 \times (-2) = -2$$

14. 임의의 실수 x 에 대하여 $x^2 + 2ax - a + 2 \geq 0$ 이 성립하기 위한 정수 a 의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$x^2 + 2ax - a + 2 \geq 0$ 이 항상 성립하기 위해서는

$$D/4 \leq 0$$

$$D/4 = a^2 + a - 2 = (a + 2)(a - 1) \leq 0$$

따라서 $-2 \leq a \leq 1$

$\therefore a = -2, -1, 0, 1$ (4개)

15. 부등식 $ax^2 + 5x + b > 0$ 을 풀어서 $2 < x < 3$ 이라는 해가 구해졌다.
이 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab = 6$

해설

$$ax^2 + 5x + b > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

해가 $2 < x < 3$ 이 되는 이차부등식은

$$(x - 2)(x - 3) < 0 \text{ 전개하면}$$

$$x^2 - 5x + 6 < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠과 일차항의 계수를 맞추기 위해

양변에 -1 을 곱하면

$$-x^2 + 5x - 6 > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

㉠, ㉢이 일치해야 하므로 $a = -1$, $b = -6$

16. $(4+3)(4^2+3^2)(4^4+3^4)(4^8+3^8)$ 을 간단히 하면?

① $4^8 + 3^8$

② $4^{15} - 3^{15}$

③ $4^{15} + 3^{15}$

④ $4^{16} - 3^{16}$

⑤ $4^{16} + 3^{16}$

해설

$$\begin{aligned} & (4+3)(4^2+3^2)(4^4+3^4)(4^8+3^8) \\ &= (4-3)(4+3)(4^2+3^2)(4^4+3^4)(4^8+3^8) \\ &= (4^2-3^2)(4^2+3^2)(4^4+3^4)(4^8+3^8) \\ &= (4^4-3^4)(4^4+3^4)(4^8+3^8) \\ &= (4^8-3^8)(4^8+3^8) \\ &= 4^{16}-3^{16} \end{aligned}$$

17. $99 \times 101 \times (100^2 + 100 + 1) \times (100^2 - 100 + 1)$ 을 계산하면?

- ① $100^6 - 1$ ② $100^6 + 1$ ③ $100^9 - 1$
④ $100^9 + 1$ ⑤ 1

해설

$$\begin{aligned} 100 &= a \text{로 치환 하면} \\ (\text{준식}) &= (a-1)(a+1)(a^2+a+1)(a^2-a+1) \\ &= (a^3-1)(a^3+1) \\ &= a^6-1 \\ &= 100^6-1 \end{aligned}$$

18. 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 + x + 1$ 로 나누면 $3x + 2$ 가 남고, 그 몫을 $x - 1$ 로 나누면 2가 남는다. 이 다항식 $f(x)$ 를 $x^3 - 1$ 로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $\frac{1}{2}R(2)$ 의 값을 구하면?

① 41 ② 31 ③ 21 ④ 11 ⑤ 1

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 + x + 1)Q(x) + 3x + 2 \\ &= (x^2 + x + 1)((x - 1)p(x) + 2) + 3x + 2 \\ &= (x^3 - 1)p(x) + 2x^2 + 5x + 4 \\ \therefore R(x) &= 2x^2 + 5x + 4 \\ \therefore \frac{1}{2}R(2) &= 11 \end{aligned}$$

19. α, β 가 x 에 관한 이차방정식 $(x+p)(x+q)-k=0$ 의 두 근일 때, 다음 방정식의 근은?

$$(x-\alpha)(x-\beta)+k=0$$

- ① α, β

② $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$

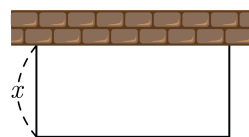
③ p, q
- ④ $\frac{1}{p}, \frac{1}{q}$

⑤ $-p, -q$

해설

방정식 $(x+p)(x+q)-k=0$ 을 정리하면
 $x^2+(p+q)x+(pq-k)=0$
이 방정식의 두 근이 α, β 이므로
 $\alpha+\beta=-(p+q), \alpha\beta=pq-k \cdots \textcircled{㉑}$
방정식 $(x-\alpha)(x-\beta)+k=0$ 을 정리하면
 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta+k=0$
 $\therefore x^2+(p+q)x+pq=0$ ($\because \textcircled{㉑}$ 대입)
 $\therefore (x+p)(x+q)=0$
따라서 구하는 두 근은 $x=-p, -q$

20. 다음 그림과 같이 20m 인 철망으로 직사각형의 모양의 닭장을 만들려고 한다. 넓이가 최대가 되도록 하는 x 의 값은?



- ① 3 m ② 4 m ③ 5 m
④ 6 m ⑤ 7 m

해설

직사각형의 세로의 길이를 x , 가로 길이를 $20 - 2x$ 라고 하면,
 $y = x(20 - 2x)$
 $= -2x^2 + 20x$
 $= -2(x - 5)^2 + 50$
 $x = 5$ 일 때, 최댓값은 50 이다.

21. 1200 명이 들어갈 수 있는 어느 소극장에서 입장권을 6000 원에 팔면 평균 600 명의 관중이 입장한다. 시장조사에 의하면, 입장료를 500 원씩 내리면 100 명씩 더 온다고 조사가 되었다. 이 때, 수입을 최대로 하기 위한 입장권의 가격은?

- ① 3000 원 ② 3500 원 ③ 4000 원
④ 4500 원 ⑤ 5000 원

해설

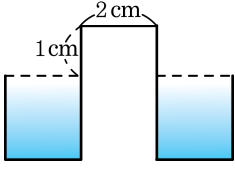
수입을 $f(x)$ 라고 하면,

$$\begin{aligned} f(x) &= (6000 - 500x)(600 + 100x) \\ &= -50000x^2 + 300000x + 3600000 \\ &= -50000(x - 3)^2 + 4050000 \end{aligned}$$

$x = 3$ 일 때 최대이다.

즉, (입장권 가격) = $6000 - 500 \times 3 = 4500$ 원.

22. 폭이 100 cm 인 긴 양철판을 구부려서 두 줄기로 물이 흘러가도록 하였다. 직사각형 단면이 다음 그림과 같이 대칭인 모양으로 물이 가장 많이 흘러갈 수 있도록 했을 때, 물이 흘러가는 단면 중 한 개 단면의 최대 넓이는 몇 cm² 인가? (단, 아래 그림의 실선은 양철판을 나타낸다.)



- ① 125 cm² ② 288 cm² ③ 350 cm²
 ④ 420 cm² ⑤ 120 cm²

해설

직사각형 단면의 세로의 길이를 a , 가로 길이를 b 라 하면
 총길이는 $a + b + a + 1 + 2 + a + 1 + b + a = 100$ 에서
 $4a + 2b = 96$
 $\therefore 2a + b = 48$ 이므로 $b = 48 - 2a$
 한 개 단면의 넓이는 ab 이므로
 $a(48 - 2a) = -2a^2 + 48a$
 $= -2(a^2 - 24a)$
 $= -2(a^2 + 24a + 144 - 144)$
 $= -2(a - 12)^2 + 288$
 따라서 $a = 12$ 일 때 최대 넓이 288 cm²

23. 자연수 n 에 대하여 이차방정식 $x^2 + nx + 2n = 0$ 의 두 근을 α, β 라 한다. α, β 가 정수일 때, n 은?

- ① 7, 8 ② 8, 9 ③ 9, 10 ④ 9 ⑤ 10

해설

근과 계수와의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = -n$, $\alpha\beta = 2n$ 이므로
 $\alpha\beta = -2(\alpha + \beta)$, $\alpha\beta + 2(\alpha + \beta) = 0$, $(\alpha + 2)(\beta + 2) = 4$
 α, β 가 정수이므로 $\alpha + 2, \beta + 2$ 도 정수
따라서

$$\begin{cases} \alpha + 2 = 1 \\ \beta + 2 = 4 \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha + 2 = 2 \\ \beta + 2 = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha + 2 = -1 \\ \beta + 2 = -4 \end{cases},$$

$$\begin{cases} \alpha + 2 = -2 \\ \beta + 2 = -2 \end{cases} \text{가 되어}$$

$$\begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha = -3 \\ \beta = -6 \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha = -4 \\ \beta = -4 \end{cases}$$

각각의 경우, n 의 값은 $n = -(\alpha + \beta)$ 이므로
-1, 0, 9, 8의 값을 갖는다.

24. 십의 자리 숫자가 일의 자리 숫자의 두 배인 어떤 두 자리 자연수가 21보다 크고 60보다 작다고 한다. 처음 두 자리 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 42

해설

일의 자리 숫자를 x 라 하면 십의 자리 숫자는 $2x$ 이다.
즉, 이 두 자리 자연수는 $(10 \times 2x) + x = 21x$ 이다.
 $21 < 21x < 60$
 $1 < x < \frac{20}{7}, \frac{20}{7} = 2.857142 \dots$
 $\therefore x = 2$
처음 두 자리 자연수는 42 이다.

25. $P(x) = x^2 + x + 1$ 에 대하여 $P(x^6)$ 을 $P(x)$ 로 나눈 나머지를 구하면?

- ① $x - 4$
- ② $4x - 1$
- ③ 5
- ④ 4
- ⑤ 3

해설

$P(x^6) = x^{12} + x^6 + 1$
 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 해를 w 라 하자.
 $w^2 + w + 1 = 0$, 양변에 $(w - 1)$ 을 곱하면
 $w^3 - 1 = 0, w^3 = 1$
 $x^{12} + x^6 + 1 = (x^2 + x + 1)Q(x) + ax + b$ 에
 w 를 대입하면,
 $(w^3)^4 + (w^3)^2 + 1 = (w^2 + w + 1)Q(w) + aw + b$
 $3 = aw + b$
 w 는 허수, a, b 는 실수 이므로, $a = 0, b = 3$
 $\therefore$ 나머지= 3