1. 다음 보기 중 $X = \{-1,\ 1,\ 2\}$에서 $Y = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$로의 함수가 될 수 있는 것은 몇 개인가?

<보기>

㉠ $f : x \rightarrow |x|^2$	㉡ $g : x \rightarrow x+2$
㉢ $h : x \rightarrow |x|+1$	㉣ $i : x \rightarrow x^2-1$
㉤ $j : x \rightarrow |x|+3$	

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

㉠ $f(-1) = |-1|^2 = 1 \in Y$
$f(1) = |1|^2 = 1 \in Y$
$f(2) = |2|^2 = 4 \in Y$
㉡ $g(-1) = -1+2 = 1 \in Y$
$g(1) = 1+2 = 3 \in Y$
$g(2) = 2+2 = 4 \in Y$
㉢ $h(-1) = |-1|+1 = 2 \in Y$
$h(1) = |1|+1 = 2 \in Y$
$h(2) = |2|+1 = 3 \in Y$
㉣ $i(-1) = i(1) = 0 \notin Y$
㉤ $j(2) = 5 \notin Y$
그러므로 ㉣, ㉤은 함수가 될 수 없고 ㉠, ㉡, ㉢ 3개 만 함수가 될 수 있다.

2. 두 집합 $X = \{-1,\ 0,\ 1\}$, $Y = \{y|y$는 정수$\}$에 대하여 두 함수 $f,\ g$를 X에서 Y로의 함수로 정의한다. $f(x) = x-1,\ g(x) = ax^2 + bx + c$라 할 때, $f = g$가 되도록 하는 상수 $a,\ b,\ c$의 곱 abc를 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f = g$에서

$f(-1) = g(-1),\ f(0) = g(0),\ f(1) = g(1)$ 이므로

$f(-1) = g(-1)$ 에서 $-2 = a - b + c \cdots$ ㉠

$f(0) = g(0)$ 에서 $-1 = c \cdots$ ㉡

$f(1) = g(1)$ 에서 $0 = a + b + c \cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $a = 0,\ b = 1,\ c = -1$

$\therefore abc = 0$

3. 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$이 정의역인 두 함수 $f(x) = ax+b$, $g(x) = -x^3+a$가 서로 같은 함수일 때, 상수 a, b의 곱 ab를 구하면?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

i) $f(1) = g(1)$ 에서 $a + b = -1 + a$

$b = -1$

ii) $f(0) = g(0)$ 에서 $a = b$

$a = -1$

$\therefore \ ab = (-1)(-1) = 1$

4. 집합 $X=\{-1,\ 1,\ 3\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 $f(x)=-x+k$ 가 일대일 대응일 때, 상수 k 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(-1)=1+k$

$f(1)=-1+k$

$f(3)=-3+k$

이때, 함수 f 가 일대일 대응이므로 공역과 치역이 일치한다.

$\therefore X=\{1+k,\ -1+k,\ -3+k\}$

그런데 $-3+k<-1+k<1+k$ 이므로

$X=\{-1,\ 1,\ 3\}$ 에서

$-3+k=-1,\ -1+k=1,\ 1+k=3$

$\therefore k=2$

5. 다음 보기는 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수이다. 일대일 대응인 것을 모두 고르면?

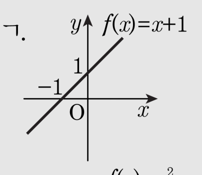
<보기>

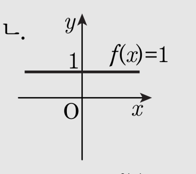
㉠ $f(x)=x+1$	㉡ $f(x)=1$
㉢ $f(x)=x^3$	㉣ $f(x)=\lvert x+1 \rvert$

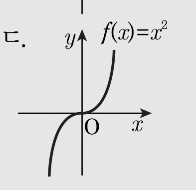
① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉠, ㉣ ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉢, ㉣

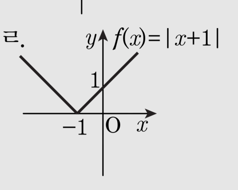
해설

일대일 대응이 되려면 함수의 그래프가 증가함수 또는 감소함수이어야 한다.

ㄱ.


ㄴ.


ㄷ.


ㄹ.


따라서 일대일 대응인 것은 ㉠, ㉢ 이다.

6. 함수 $f\left(\frac{x+1}{x-2}\right)=\frac{3x+4}{x+1}$ 에 대하여, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값은?

① 3 ② $\frac{8}{3}$ ③ 6 ④ $\frac{13}{2}$ ⑤ 7

해설

$\frac{x+1}{x-2}=t$로 놓으면

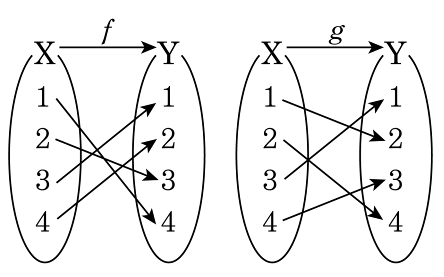
$x+1=tx-2t,\ (t-1)x=2t+1$

$\therefore\ x=\frac{2t+1}{t-1}$

$f(t)=\frac{3\times\frac{2t+1}{t-1}+4}{\frac{2t+1}{t-1}+1}=\frac{10t-1}{3t}$

$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{8}{3}$

7. 두 함수 f, g 가 아래 그림과 같이 정의될 때, $g = h \cdot f$ 를 만족시키는 함수 h 에 대하여 $h(2)$ 의 값은?



① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

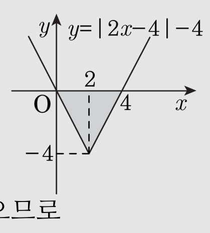
$g = h \cdot f$ 이고 함수 f 는 일대일대응이므로
역함수가 존재한다.
$\therefore\ g \cdot f^{-1}$
$= (h \cdot f) \cdot f^{-1} = h \cdot (f \cdot f^{-1})$
$= h \cdot I = h$
$\therefore\ h(2) = (g \cdot f^{-1})(2)$
$= g(f^{-1}(2))$
$= g(4)(\because\ f^{-1}(2) = 4)$
$\therefore\ g(4) = 3$

8. 함수 $y = |2x - 4| - 4$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설



절대값 기호 안을 0 으로 하는 x 의 값은
$2x - 4 = 0$ 에서 $x = 2$
(i) $x < 2$ 일 때, $y = -(2x - 4) - 4 = -2x$
(ii) $x \geq 2$ 일 때, $y = (2x - 4) - 4 = 2x - 8$
따라서 (i), (ii) 에 의하여
함수 $y = |2x - 4| - 4$ 의 그래프는 그림과 같으므로
구하는 도형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$

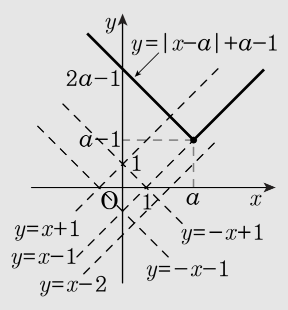
9. 다음 중 임의의 실수 a 에 대하여 $y=|x-a|+a-1$ 의 그래프와 항상 만나지 않는 직선의 방정식을 구하면?

① $y=x+1$　② $y=x-1$　③ $y=x-2$
④ $y=-x-1$　⑤ $y=-x+1$

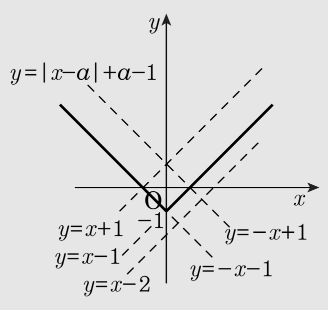
해설

a 의 부호에 따라 그래프의 위치가 달라진다.

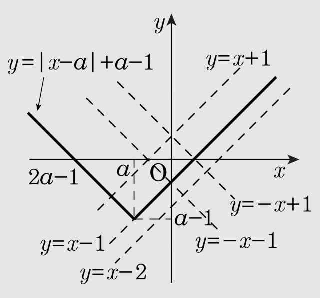
ⅰ) $a>0$ 일 때,
$y=|x-a|+a-1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.
따라서, $y=|x-a|+a-1$ 은 $y=x+1$,
$y=x-1$ 과 만나며 $a \le 1$ 일 때
$y=-x+1$ 도 만난다.



ⅱ) $a=0$ 일 때,
$y=|x-a|+a-1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.
따라서 $y=|x-a|+a-1$ 과
만나지 않는 그래프는 $y=x-2$ 밖에 없다.



ⅲ) $a<0$ 일 때,
$y=|x-a|+a-1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.
따라서 $y=|x-a|+a-1$ 과 만나지 않는
그래프는 $y=x-2$ 밖에 없다.



ⅰ), ⅱ), ⅲ) 에서 $y=|x-a|+a-1$ 의
그래프와 항상 만나지 않는 직선은 $y=x-2$ 이다.

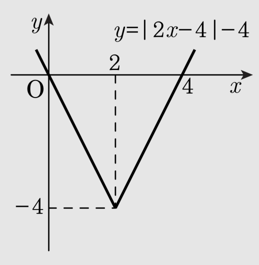
10. 함수 $y = | 2x - 4 | -4$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

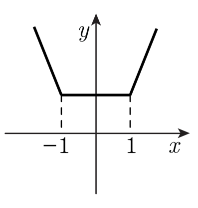
해설

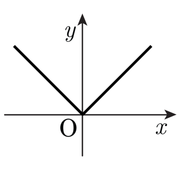
$y = | 2x - 4 | -4 = | 2(x-2) | -4$ 의 그래프는
$y = | 2x |$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 2 만큼,
y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동한 것이므로
다음 그림과 같다.

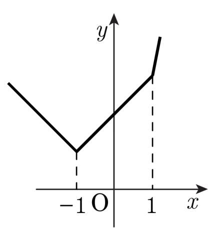


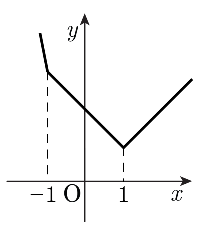
따라서 주어진 함수의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$

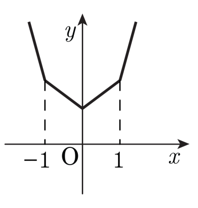
11. 다음 중 함수 $y=|x-1|+x+|x+1|$의 그래프는?

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

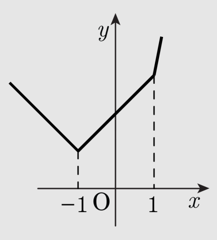
해설

i) $x \le -1$ 일 때, $y=|x-1|+x+|x+1|$
$=-(x-1)+x-(x+1)$
$=-x$

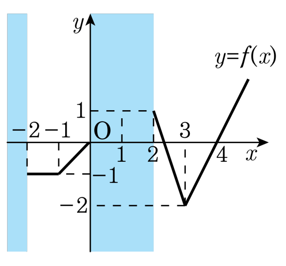
ii) $-1 < x \le 1$ 일 때 $y=|x-1|+x+|x+1|$
$=-(x-1)+x+(x+1)$
$=x+2$

iii) $1 < x$ 일 때 $y=|x-1|+x+|x+1|$
$=(x-1)+x+(x+1)$
$=3x$

i), ii), iii) 에 의하여 주어진 함수의 그래프는



12. 모든 실수 x에 대하여 $f(-x) = -f(x)$를 만족시키는 함수 $y = f(x)$의 그래프의 일부분이 다음 그림과 같이 지워져 있다. 다음 보기는 함수 $y = f(x)$에 대한 설명이다. M, N의 합을 구하여라.



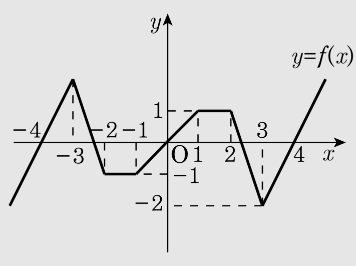
$-4 \leq x \leq -2$일 때, $f(x)$의 최댓값은 M이고, $0 \leq x \leq 2$일 때, $f(x)$의 최댓값은 N이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

모든 실수 x에 대하여 $f(-x) = -f(x)$를
만족시키므로 주어진 함수는 기함수
즉, 원점 대칭이다. 따라서 그래프를 완성하면
다음 그림과 같으므로



$-4 \leq x \leq -2$일 때,
$f(x)$의 최댓값 $M = 2$이고,
$0 \leq x \leq 2$일 때,
$f(x)$의 최댓값 $N = 1$이다.
$\therefore M + N = 3$

13. 함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$가 기함수이고 $f(1) = 3$을 만족시킬 때, $a + b - c$의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

기함수는 모든 실수 x에 대하여 원점에 대하여 대칭이어야 하므로

$f(-x) = -f(x)$

$ax^2 - bx + c = -ax^2 - bx - c$

따라서 $a = 0$, $c = 0$ $\quad \therefore f(x) = bx$

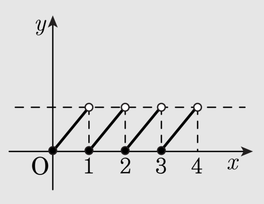
$f(1) = 3$이므로 $f(1) = b = 3$

$\therefore a + b - c = 3$

14. $y = x - [x](0 \leq x \leq 4)$ 의 그래프를 그릴 때, 그래프의 길이를 구하면?
($[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수)

① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ 4 ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ 8

해설



$y = x - [x]$ 에서
i) $0 \leq x < 1$ 인 경우 $y = x - 0$
ii) $1 \leq x < 2$, $y = x - 1$
iii) $2 \leq x < 3$, $y = x - 2$
iv) $3 \leq x \leq 4$, $y = x - 3$
i), ii), iii), iv)를 그래프로 그리면 다음과 같다. 그러므로 각각의 길이는 $\sqrt{2}$ 이 일정하므로
$4\sqrt{2}$ 가 된다.

15. 임의의 정수 k에 대하여 $f(k) = 2k - 1$이라 하고, 연산 $\diamond$를 $f(m)\diamond f(n) = f(2m+n)$로 정의한다. 이 때, $-3\diamond 5$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$f(m) = -3,\ f(n) = 5$라 하면

$2m - 1 = -3,\ 2n - 1 = 5$

$\therefore\ m = -1,\ m = 3$

$\therefore -3\diamond 5 = f(-1)\diamond f(3) = f(-2+3) = f(1) = 1$

16. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 $f(1)=3$ 이고, 모든 실수 x 에 대하여

$f(x+1)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$ 를 만족시킨다. 이 때, $f(1998)$ 의 값은?

① 3　② 2　③ −1　④ −2　⑤ −3

해설

$f(2)=\dfrac{1+f(1)}{1-f(1)}$

$=\dfrac{1+3}{1-3}=-2$

$f(3)=\dfrac{1+f(2)}{1-f(2)}$

$=\dfrac{1-2}{1+2}=-\dfrac{1}{3}$

$f(4)=\dfrac{1+f(3)}{1-f(3)}$

$=\dfrac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{2}$

$f(5)=\dfrac{1+f(4)}{1-f(4)}$

$=\dfrac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3$

$f(5)=f(1)=3$ 이므로

$f(6)=f(2)=-2$, $f(7)=f(3)=-\dfrac{1}{3}$

$f(8)=f(4)=\dfrac{1}{2}$, $f(9)=f(5)=f(1)=3,\cdots$

이와 같이 $f(n)$ (n 은 자연수)은

$3,\ -2,\ -\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{2}$ 이 반복됨을 알 수 있다.

$\therefore\ f(4n+k)=f(k)$

(단, n 은 0 이상의 정수, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3$)

그러므로 $f(1998)=f(4\times 499+2)=f(2)=-2$

17. 일차 이하의 다항함수 $y = f(x)$ 가 다음 세 조건을 만족한다.

Ⅰ. $f(0) \le f(1)$
Ⅱ. $f(2) \ge f(3)$
Ⅲ. $f(1) = 1$

이 때, 다음 중 옳은 것을 <u>모두</u> 고르면?

< 보기>

㉠ $f(2) = 1$　　㉡ $f(3) = 3f(1)$

㉢ $f(-1) > f(1)$

① ㉠　　② ㉡　　③ ㉠, ㉡

④ ㉠, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

일차 이하의 다항함수 중
조건 Ⅰ, Ⅱ를 만족하는함수는
상수함수이므로 조건 Ⅲ에 의하여 $f(x) = 1$ 이다.
따라서 옳은 것은 ㉠뿐이다.

18. 함수 $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ 에 대하여 방정식 $(f \circ f)(x) = x^3$ 의 해의 합을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

$$= \frac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x}{x-1} - 1} = \frac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x-x+1}{x-1}} = x$$

$\therefore\ x^3 = x,\ x^3 - x = 0,\ x(x-1)(x+1) = 0$

$\therefore\ x = -1\ or\ 0\ or\ 1$

그런데 $x \neq 1$ 이므로 $x = -1\ or\ 0$

$\therefore\ -1 + 0 = -1$

19. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f, g가 $f(x) = ax + b$, $g(x) = 2x^2 + 3x + 1$이고, 모든 실수 x에 대하여 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$를 만족할 때, $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(10)$의 값은?(단, $a \neq 0$)

① 60　② 55　③ 51　④ 48　⑤ 45

해설

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = a(2x^2 + 3x + 1) + b$
$= 2ax^2 + 3ax + a + b \cdots\cdots$ ㉠
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2(ax + b)^2 + 3(ax + b) + 1$
$= 2a^2x^2 + (4ab + 3a)x + 2b^2 + 3b + 1 \cdots\cdots$ ㉡
모든 실수 x에 대하여 ㉠ = ㉡이므로
$2a = 2a^2,\ 3a = 4ab + 3a,\ a + b = 2b^2 + 3b + 1$
위의 식을 연립하여 풀면 $a = 1,\ b = 0(\because a \neq 0)$
즉, $f(x) = x$이므로
$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(10)$
$= 1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = 55$

20. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f 에 대하여 $f\left(\frac{x+1}{2}\right)=6x-1$ 이다. $f\left(\frac{4-x}{3}\right)=ax+b$ 일 때, 두 상수 a, b 의 곱 ab 의 값은?

① -36 ② -20 ③ -4 ④ 20 ⑤ 36

해설

$f\left(\frac{x+1}{2}\right)=6x-1$ 에서 $\frac{x+1}{2}=t$ 라고 하면 $x=2t-1$ 이므로

$f(t)=6(2t-1)-1=12t-7$ ······㉠

㉠에 t 대신에 $\frac{4-x}{3}$ 를 대입하면

$f\left(\frac{4-x}{3}\right)=12\left(\frac{4-x}{3}\right)-7=16-4x-7=-4x+9$

$\therefore\ ab=(-4)\cdot 9=-36$

21. $f_1(x) = \dfrac{x}{x+1}$ 에 대하여 $f_{n+1}(x) = f_1 \circ f_n(x)(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 라 할때 $f_{2008}(1)$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{2007}$　② $\dfrac{1}{2008}$　③ $\dfrac{1}{2009}$　④ $\dfrac{1}{4017}$　⑤ $\dfrac{1}{4018}$

해설

$f_1(x) = \dfrac{x}{x+1}$ 에서

$$f_2(x) = (f_1 \circ f_1)(x) = f_1\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1}$$

$$= \frac{x}{2x+1}$$

$$f_3(x) = (f_1 \cdot f_2)(x)$$

$$= f_1\left(\frac{x}{2x+1}\right) = \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1}+1}$$

$$= \frac{x}{3x+1}$$

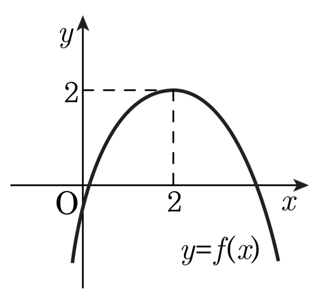
$$\vdots$$

이상에서 $f_{2008}(x)$ 를 추정하면

$$f_{2008}(x) = \frac{x}{2008x+1}$$

$$\therefore\ f_{2008}(1) = \frac{1}{2008 \times 1 + 1} = \frac{1}{2009}$$

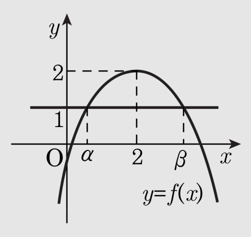
22. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $(f \circ f)(x) = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수는?



① 없다 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

$(f \circ f)(x) = 1$ 을 만족하므로 $f(f(x)) = 1$
$f(x) = t$ 라 놓고 $f(t) = 1$ 을 만족하는 t 의 값을 $\alpha, \beta(\alpha < \beta)$ 라 하면
$0 < \alpha < 2 < \beta$ 이다.
이 때, $f(x) = \alpha$ 를 만족하는 x 의 값은 2 개이지만
$f(x) = \beta$ 를 만족하는 근은 없다.



따라서, $(f \circ f)(x) = 1$ 을 만족하는 x 의 값은 2 개이다.

23. 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하자. $x \neq 1$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f\left(2g(x) - \dfrac{x}{x-1}\right) = x$ 라 할 때, $f(2)$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(f^{-1}(x)) = x$

$\therefore\ 2g(x) - \dfrac{x}{x-1} = g(x)$

$\Rightarrow g(x) = \dfrac{x}{x-1}$

$f(2) = k$ 라고 하면

$g(k) = 2 \Rightarrow k = 2$

24. $\begin{cases} 2x+1 & (x \geq 1) \\ x+2 & (x < 1) \end{cases}$ 에 대하여 $f^{-1}(5)+f^{-1}(k)=-2$ 일 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $k=-2$

해설

$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & (x \geq 1) \\ x+2 & (x < 1) \end{cases}$ 에서

$x \geq 1$ 일 때, $f(x) \geq 3$ 이며

$x < 1$ 일 때, $f(x) < 3$ 이다.

이 때, $f^{-1}(5)+f^{-1}(k)=-2$ 에서

$f^{-1}(5)=a$ 라고 놓으면

$f(a)=5 \geq 3$ 이므로 $f(a)=2a+1=5$

$\therefore a=2$

그러므로 $f^{-1}(k)=-4$

$f(-4)=-4+2=k$ ($\because -4<3$)

$\therefore k=-2$

25. 함수 $f(x) = x^2 - 4x + 6(x \geq 2)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라고 할 때, $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 두 교점 사이의 거리를 구하면?

① -1 ② $-\sqrt{2}$ ③ 1 ④ $\sqrt{2}$ ⑤ 2

해설

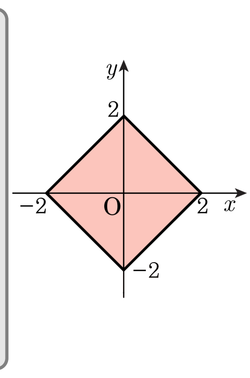
함수 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 두 함수의 그래프의 교점은 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 그래프의 교점과 같다.
$y = x^2 - 4x + 6$ 과 $y = x$ 를 연립하면
$x^2 - 5x + 6 = 0,\ (x-2)(x-3) = 0$
$\therefore x = 2$ 또는 $x = 3$
$\therefore x = 2,\ y = 2$ 또는 $x = 3,\ y = 3$
즉, 두 교점은 점 $(2,\ 2)$, $(3,\ 3)$ 이다.
따라서, 구하는 두 교점 사이의 거리는
$\sqrt{(3-2)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2}$

26. $|x|+|y|=2$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$|x|+|y|=2$ 의 그래프는
$x+y=2$ 의 그래프에서
$x \geq 0$, $y \geq 0$ 인 부분을
각각 x 축, y 축, 원점에 대하여 대칭 이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 도형의 넓이는 $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 8$

27. 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족하는 X 에서 X 로의 함수 f 의 개수는?

(가) f 의 역함수가 존재한다. (나) $f(1) = f^{-1}(1)$

① 12　② 14　③ 16　④ 18　⑤ 20

해설

함수 f 는 역함수를 가지므로 일대일 대응이어야 한다.

i) $f^{-1}(1) = f(1) = 1$ 일 때,
일대일 대응 $\{2,\ 3,\ 4\} \to \{2,\ 3,\ 4\}$ 의 개수는 $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ (개)

ii) $f^{-1}(1) = f(1) = 2$ 일 때,
$f(2) = 1$ 이므로 $\{3,\ 4\} \to \{3,\ 4\}$ 의 개수는 $2 \cdot 1 = 2$ (개)

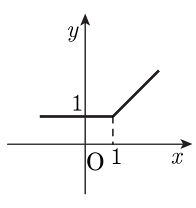
iii) $f^{-1}(1) = f(1) = 3$ 일 때,
$f(3) = 1$ 이므로 $\{2,\ 4\} \to \{2,\ 4\}$ 의 개수는 $2 \cdot 1 = 2$ (개)

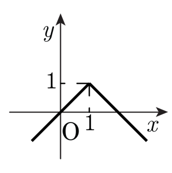
iv) $f^{-1}(1) = f(1) = 4$ 일 때,
$f(4) = 1$ 이므로 $\{2,\ 3\} \to \{2,\ 3\}$ 의 개수는
$2 \cdot 1 = 2$ (개)

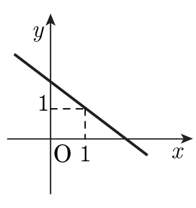
따라서, 구하는 함수의 개수는 $6 + 2 + 2 + 2 = 12$

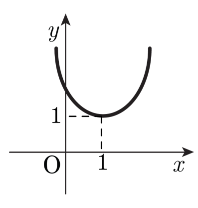
28. 함수 $f(x)$ 가 다음 두 조건을 만족할 때 다음 중 $y=f(x)$ 의 그래프가 될 수 있는 것은?

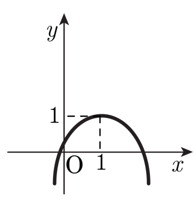
> Ⅰ. $f(1)=1$
> Ⅱ. 모든 실수 x 에 대하여 $\dfrac{f(1+x)+f(1-x)}{2}=1$

①


②


③


④


⑤


해설

$f(1+x),\ f(1-x)$ 은 $x=1$ 에서
같은 거리만큼 떨어져 있는
두 개의 x 에 대한 함수값을 나타낸다.
이때, 모든 실수 x 에 대하여 Ⅱ가 성립한다는 것은
$x=1$ 에서 같은 거리만큼 떨어져 있는
두 개의 x 에 대한 함수값의 평균이
항상 1 이라는 뜻이므로
함수 $y=f(x)$ 의 그래프는
점$(1,\ 1)$ 에 대하여 대칭이다.
따라서, 보기의 그래프 중 점$(1,\ 1)$ 에 대하여 대칭인 그래프는
③이다.

29. 임의의 양수 x, y 에 대하여 함수 f 가 $f(xy) = f(x) + f(y) - 2$ 를 만족하고 $f(2) = 3$ 일 때, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값은?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

$f(xy) = f(x) + f(y) - 2 \quad \cdots\cdots ㉠$

㉠에 $x = 1$, $y = 1$ 을 대입하면

$f(1) = f(1) + f(1) - 2$

$\therefore f(1) = 2$

㉠에 $x = 2$, $y = \frac{1}{2}$ 을 대입하면

$f(1) = f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right) - 2$

$2 = 3 + f\left(\frac{1}{2}\right) - 2 \qquad \therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

30. 다항식 $f(x)$ 가 임의의 실수 $x,\ y$ 에 대하여 $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$, $f(1) = 1$ 을 만족시킬 때, $f(0) + f(2)$ 의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

임의의 실수에 대하여
$f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ 를 만족하므로
$x = 1,\ y = 1$ 을 준식에 대입하면
$1 = 1 \cdot 1 = f(1)f(1) = f(2) + f(0)$
$\therefore f(0) + f(2) = 1$

31. 자연수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 두 조건을 만족시킬 때, $f(1280)$ 의 값은 얼마인가?

(ⅰ) $f(2x) = f(x)\ (x = 1, 2, 3, \ldots)$
(ⅱ) $f(2x+1) = 2^x\ (x = 0, 1, 2, 3, \cdots)$

① 2　② 4　③ 8　④ 16　⑤ 32

해설

$1280 = 2^8 \cdot 5$ 이므로,

$$f(2^8 \cdot 5) = f(2^7 \cdot 5) = f(2^6 \cdot 5) = \cdots = f(5) = f(2 \cdot 2 + 1)$$
이므로,

$f(2 \cdot 2 + 1) = 2^2 = 4$

32. 실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$ 가

$f(x)=\begin{cases} 2-x & (x\text{는 유리수}) \\ x & (x\text{는 무리수}) \end{cases}$ 로 정의될 때, $f(x)+f(2-x)$ 의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

함수 $f(x)=\begin{cases} 2-x & (x\text{는 유리수}) \\ x & (x\text{는 무리수}) \end{cases}$ 에서

(i) x 가 유리수일 때, $2-x$ 도 유리수이므로

$f(x)+f(2-x)=(2-x)+\{2-(2-x)\}=2$

(ii) x 가 무리수일 때, $2-x$ 도 무리수이므로

$f(x)+f(2-x)=x+(2-x)=2$

(i), (ii)에서 $f(x)+f(2-x)=2$

33. $X = \{x \mid x \geq a$ 인 실수 $\}$이고, $f(x) = x^2 - 6x$ 로 정의되는 함수 $f : X \to X$ 가 일대일대응이 될 때, 상수 a 의 값을 하면?

① 3 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 10

해설

$X = \{x \mid x \geq a$ 인 실수 $\}$이므로
일대일 대응이 되려면
$x^2 - 6x \geq x$ 가 되어야 한다.
부등식을 풀면
$x \leq 0$ 또는 $x \geq 7$
$x \geq a$ 이므로 $x \geq 7$ 을 만족하는 x 의 최솟값이 a 가 된다.
$\therefore\ a = 7$

34. 퀴즈대회에 나간 호준이는 다음에 주어진 마지막 문제를 맞히면 우승이다. 호준이가 우승할 수 있는 답을 고르면?

> 집합 $\mathrm{A} = \{a,\ b,\ c\}$일 때, A에서 A로의 함수 $f : \mathrm{A} \to \mathrm{A}$에 대하여,
> 함수의 개수는 m개,
> 일대일 대응 함수의 개수는 n개,
> 상수 함수는 s개,
> 항등함수는 r개이다.
> $m+n+s+r$의 값을 구하여라.

① 21 ② 27 ③ 33 ④ 37 ⑤ 43

해설

함수의 개수는 $3^3 = 27$(가지) $\therefore\ m = 27$
일대일 대응의 개수는
$3 \times 2 \times 1 = 6$(가지) $\therefore\ n = 6$
상수함수의 개수는 치역이 a, b, c인 경우의 3가지
$\therefore\ s = 3$
항등함수의 개수는 1가지 $\therefore\ r = 1$
따라서 $m+n+s+r = 27+6+3+1 = 37$

35. 두 집합 $X=\{1,\ 2\}$, $Y=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 중에서 X 의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 \neq x_2$ 일 때, $f(x_1) \neq f(x_2)$ 인 함수는 몇 개인가?

① 2 개 ② 5 개 ③ 10 개
④ 20 개 ⑤ 120 개

해설

$x_1 \neq x_2$ 일 때,
$f(x_1) \neq f(x_2)$ 는 일대일 함수를 의미한다.
즉, $X=\{1,\ 2\}$ 이고 $Y=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$ 이므로
일대일 함수는 $f(1)$ 이 될 수 있는 것이
$a,\ b,\ c,\ d,\ e$ 5 가지
$f(2)$ 가 될 수 있는 것이 $f(1)$ 을 제외한 4 가지
$\therefore\ 5 \times 4 = 20$(개)