1. 방정식 $(x-1)(x^2-x-2)=0$의 모든 근의 합을 구하면?

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

$(x-1)(x-2)(x+1)=0$

$\therefore\ x=-1,1,2$

$\therefore\ -1+1+2=2$

2. 다음 연립방정식의 해를 구하면?

$$\begin{cases} 0.6x + 0.5y = 2.8 & \cdots ㉠ \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 2 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

① $(2, 3)$ ② $(-2, 3)$ ③ $(3, 2)$
④ $(3, -2)$ ⑤ $(-3, -2)$

해설

㉠, ㉡의 양변에 각각 10, 6을 곱하면

$$\begin{cases} 6x + 5y = 28 & \cdots\cdots ㉢ \\ 2x + 3y = 12 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$$

㉢ − ㉣×3을 하면 $-4y = -8$

$\therefore\ y = 2$를 ㉣대입하면 $x = 3$

$\therefore\ x = 3,\ y = 2$

3. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$에서
$x^2 = t$로 놓으면
$t^2 - 13t + 36 = 0$, $(t-4)(t-9) = 0$
$\therefore\ t = 4$ 또는 $t = 9$
(i) $t = 4$일 때, $x^2 = 4$
$\therefore\ x = \pm 2$
(ii) $t = 9$일 때, $x^2 = 9$
$\therefore\ x = \pm 3$
따라서 모든 해의 합은
$(-2) + 2 + (-3) + 3 = 0$

4. 방정식 $x^3 - x^2 + ax - 1 = 0$의 한 근이 -1일 때, 상수 a의 값과 나머지 두 근을 구하면?

① $a = 3, 1 \pm \sqrt{2}$
② $a = -3, 1 \pm \sqrt{2}$
③ $a = 3, 1 \pm \sqrt{3}$
④ $a = -3, 1 \pm \sqrt{3}$
⑤ $a = -1, 1 \pm \sqrt{2}$

해설

$x = -1$이 근이므로 $-1 - 1 - a - 1 = 0$에서 $a = -3$
인수정리와 조립제법을 이용하면
(좌변) $= (x+1)(x^2 - 2x - 1) = 0$
$x^2 - 2x - 1 = 0$의 근은 $1 \pm \sqrt{2}$
$\therefore a = -3$, 나머지 근은 $1 \pm \sqrt{2}$

5. 삼차방정식 $2x^3-7x^2+11x+13=0$의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라고 할 때, 다음 (가), (나), (다)에 알맞은 값을 차례로 쓴 것은?

(가) $\alpha+\beta+\gamma$
(나) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$
(다) $\alpha\beta\gamma$

① $\frac{7}{2},\ \frac{11}{2},\ -\frac{13}{2}$　② $-\frac{7}{2},\ \frac{13}{2},\ \frac{11}{2}$　③ $\frac{13}{2},\ \frac{7}{2},\ -\frac{11}{2}$
④ $\frac{11}{2},\ -\frac{13}{2},\ \frac{7}{2}$　⑤ $\frac{7}{2},\ -\frac{11}{2},\ \frac{13}{2}$

해설

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0(a\neq 0)$의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$

$\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

6. 다음 중 $1+i$가 하나의 근이며 중근을 갖는 사차방정식은?

① $(x^2-2x+2)(x^2-2x+1)$

② $(x^2-2x+2)(x-1)(x+1)$

③ $(x^2-1)(x^2-2x-1)$

④ $(x^2+1)(x-1)(x+1)$

⑤ $(x^2+1)(x^2-2x+1)$

해설

한 근이 $1+i$이면
다른 한 근은 $1-i$이다.
$\therefore \ \{x-(1+i)\}\{x-(1-i)\}=0$
$\Rightarrow \quad x^2-2x+2=0$
주어진 조건에 맞는 방정식 :
$(x^2-2x+2)(x-\alpha)^2=0$
$\therefore$ ①이 조건에 맞다

7. 삼차방정식 $x^3 - 5x^2 + ax + b = 0$의 한 근이 $1 + \sqrt{2}$일 때, 다른 두 근을 구하면? (단, a, b는 유리수)

① $1 - \sqrt{2}$, 2　　② $-1 + \sqrt{2}$, -3　　③ $1 - \sqrt{2}$, 3

④ $1 - \sqrt{2}$, -3　　⑤ $-1 + \sqrt{2}$, 3

해설

한 근이 $1 + \sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $1 - \sqrt{2}$이다.
삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해 세근의 합은 5이므로
$\therefore\ 1 + \sqrt{2} + (1 - \sqrt{2}) + \alpha = 5,\quad \alpha = 3$
$\therefore$ 다른 두 근은 $3, 1 - \sqrt{2}$

8. $x^3-1=0$의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega^3+\overline{\omega}^3$의 값을 구하면? (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$

$x=1$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$를 ω라 하면

$\overline{\omega}=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore\ \omega^3=1,\ \overline{\omega}^3=1,\ \omega^3+\overline{\omega}^3=2$

9. 사차식 $x^4 - 4x^2 - 12$ 를 복소수의 범위에서 인수분해하면?

① $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$

② $(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})(x+2i)(x-2i)$

③ $(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$

④ $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+2i)(x-2i)$

⑤ $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{6}i)(x-\sqrt{6}i)$

해설

$x^4 - 4x^2 - 12,\quad x^2 = Y$ 라 하자

$\Rightarrow\quad Y^2 - 4Y - 12 = (Y+2)(Y-6) = 0$

$Y = -2$ 또는 $Y = 6$

$\Rightarrow\quad x^2 = -2,\quad x^2 = 6$

$\Rightarrow\quad x = \pm\sqrt{2}i,\quad x = \pm\sqrt{6}$

$\therefore\ x^4 - 4x^2 - 12$

$= (x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$

10. 다음은 α가 삼차방정식 $x^3-3x+1=0$의 한 근일 때, α^2-2도 이 방정식의 근임을 보인 것이다. (가)~(마)에 들어갈 말로 옳지 <u>않은</u> 것은?

> α 는 $x^3-3x+1=0$ 의 근이므로 (가)
> $f(x)=x^3-3x+1$ 이라고 하면
> $f(\alpha^2-2)=$ (나) $=$ (다) $=$ (라) $=$ (마) $=0$
> 따라서, α^2-2 도 삼차방정식 $x^3-3x+1=0$ 의 근이다.

① (가) $\alpha^3-3\alpha+1=0$

② (나) $(\alpha^2-2)^3-3(\alpha^2-2)+1$

③ (다) $\alpha^6-6\alpha^4+9\alpha^2-1$

④ (라) $(\alpha^3-3\alpha+1)(\alpha^3-3\alpha-1)$

⑤ (마) $0\cdot 2$

해설

α는 $x^3-3x+1=0$의 근이므로 $\alpha^3-3\alpha+1=0$
$f(x)=x^3-3x+1$이라고 하면 $f(\alpha^2-2)=(\alpha^2-2)^3-3(\alpha^2-2)+1$
$=\alpha^6-6\alpha^4+9\alpha^2-1=(\alpha^3-3\alpha+1)(\alpha^3-3\alpha-1)=0\cdot(-2)=0$
따라서 α^2-2도 삼차방정식 $x^3-3x+1=0$의 근이다.

11. 방정식 $x^6 - 1 = 0$의 해가 <u>아닌</u> 것은?

① -1　　② 1　　③ $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

④ $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$　　⑤ $\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$

해설

$x^6-1 = (x^3+1)(x^3-1) = (x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1) = 0$

$\Rightarrow x = -1,\ 1,\ \dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2},\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

12. 삼차방정식 $x^3 + x - 2 = 0$ 의 해를 구하면?

① $1,\ \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$　② $-1,\ \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$　③ $-1,\ \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}}{2}$

④ -1　⑤ 1

해설

조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ & & 1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$\Rightarrow\ (x-1)(x^2+x+2) = 0$

$x^2 + x + 2 = 0$ 의 근 : $\dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$

$\therefore$ 해 : $1,\ \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$

13. 방정식 $x^4 - 4x + 3 = 0$의 해를 구하면?

① $x = 1, x = -1 \pm 2i$
② $x = -1, x = 1 \pm 2i$
③ $x = 1, x = -1 \pm \sqrt{2}i$
④ $x = -1, x = 1 \pm \sqrt{2}i$
⑤ $x = 1$

해설

1	1	0	0	−4	3
		1	1	1	−3
1	1	1	1	−3	0
		1	2	3	
	1	2	3	0	

$(x-1)^2(x^2+2x+3) = 0,\ x = 1, -1 \pm \sqrt{2}i$

14. x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} ax - y = a \\ x - ay = 1 \end{cases}$ 이 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 a값은?

① $a = -1$
② $a = 1$
③ $a = \pm 1$
④ $a \neq \pm 1$인 모든 실수
⑤ 없다.

해설

연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면
$\frac{a}{1} \neq \frac{-1}{-a}$, $-a^2 \neq -1$
$\therefore\ a \neq \pm 1$
따라서 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는
a의 값은 $a \neq \pm 1$인 모든 실수이다.

15. 삼차방정식 $x^3+x^2+ax+b=0$의 두 근이 -3, $1-\sqrt{2}$일 때, 유리수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① -10　② -5　③ 0　④ 5　⑤ 10

해설

계수가 실수인 삼차방정식의 한 근이 $1-\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $1+\sqrt{2}$이다.
따라서, 근과 계수의 관계에 의하여
$a=(1-\sqrt{2})\left(1+\sqrt{2}\right)+(-3)\left(1-\sqrt{2}\right)+(-3)\left(1+\sqrt{2}\right)=-7$
$b=-\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)(-3)=-3$
$\therefore\ a+b=-10$

16. x에 대한 삼차방정식 $x^3+3x^2-kx-5=0$의 한 근이 -1일 때, 상수 k의 값은?

① -5　② -3　③ -1　④ 1　⑤ 3

해설

$x^3+3x^2-kx-5=0$의 한 근이 -1이므로 $x=-1$을 대입하면
$(-1)^3+3(-1)^2-k(-1)-5=0$
$\therefore\ k=3$

17. $x^4-5x^2-14=0$의 두 허근을 α, β라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하면?

① 4　　② -4　　③ 8　　④ -8　　⑤ -16

해설

$x^4-5x^2-14=(x^2+2)(x^2-7)=0$이므로
두 허근 α, β는
각각 $\sqrt{2}i$, $-\sqrt{2}i$이므로
$\alpha^2+\beta^2=-2-2=-4$

18. 사차방정식 $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$의 모든 실근의 곱은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$x^4 + 3x^2 - 10 = 0$에서
$x^2 = t$로 치환하면
$t^2 + 3t - 10 = 0$, $(t+5)(t-2) = 0$
$\therefore\ t = -5$ 또는 $t = 2$
$\therefore\ x = \pm\sqrt{5}i$ 또는 $x = \pm\sqrt{2}$
따라서 모든 실근의 곱은
$\sqrt{2} \times (-\sqrt{2}) = -2$

19. $x^2 - x + 1 = 0$일 때, x^{180}의 값을 구하면?

① 180　② −180　③ −1　④ 0　⑤ 1

해설

$x^2 - x + 1 = 0$양변에
$(x+1)$을 곱하면, $x^3 + 1 = 0$
$x^3 = -1 \Rightarrow x^{180} = (x^3)^{60} = (-1)^{60} = 1$

20. 허수 w가 $\omega^3 = 1$을 만족할 때, $\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5$ 의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$$w^3 = 1 \Rightarrow \quad (\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad \omega^2 + \omega + 1 = 0, \omega^3 = 1$$

$\therefore \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5$
$= \omega + \omega^2 + 1 + \omega + \omega^2$
$= (\omega^2 + \omega + 1) + \omega^2 + \omega = -1$

21. $x^3 = 1$의 한 허근이 ω일 때, $\omega^{10} + \omega^5 + 1$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$w^3 = 1,$

$x^3 - 1 = 0$

$\Rightarrow\ (x-1)(x^2+x+1) = 0$의 한 허근이 ω

$\Rightarrow w^2 + w + 1 = 0$

$\omega^{10} + \omega^5 + 1 = (w^3)^3 w + w^2 \cdot w^3 + 1$

$= w^2 + w + 1$

$= 0$

22. 방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 w라고 할 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $w^3 - 1 = 0$
② $w^2 - w + 1 = 0$
③ $w + \frac{1}{w} = -1$
④ $w^{2008} + w^{2009} = -1$
⑤ 다른 허근은 w^2이다.

해설

① $w^3 = 1$이므로 $w^3 - 1 = 0$
② $w^3 - 1 = 0$이므로
$(w-1)(w^2 + w + 1) = 0$
$w - 1 \neq 0$이므로 $w^2 + w + 1 = 0$
$\therefore\ w^2 - w + 1 = -2w \neq 0$
③ $w^2 + w + 1 = 0$이고
$\omega \neq 0$이므로
양변을 w로 나누면 $w + 1 + \frac{1}{w} = 0$
$\therefore\ w + \frac{1}{w} = -1$
④ $\omega^{2008} = (\omega^3)^{669} \cdot \omega = \omega$,
$\omega^{2009} = (\omega^3)^{669} \cdot \omega^2 = \omega^2$
$\therefore\ w^{2008} + w^{2009} = w + w^2 = -1$
$(\because w^2 + w + 1 = 0)$
⑤ $(w^2)^3 = w^6 = (w^3)^2 = 1^2 = 1$
따라서, w^2은 $x^3 = 1$의 다른 한 허근이다.

23. 방정식 $x^3 = 1$의 두 허근을 α, β라고 할 때 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$　　② $\alpha = \beta^2$

③ $\alpha^2 + \beta^2 = -1$　　④ $\alpha\beta = -1$

⑤ $\beta^2 + \beta + 1 = 0$

해설

$x^3 = 1$에서 $x^3 - 1 = 0$

$\rightarrow\ (x-1)(x^2+x+1) = 0$

$\therefore\ x - 1 = 0$, 또는 $x^2 + x + 1 = 0$

$\therefore\ x = 1,\ \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$$\therefore\ \alpha\beta = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \times \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

$$= \frac{(-1)^2 - (\sqrt{3}i)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

해설

$x^2 + x + 1 = 0$의 두 근이 α, β이므로
근과 계수와의 관계를 이용하여
$\alpha^2 + \beta^2, \alpha\beta$의 값을 구해도 된다.

24. 방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 ω라 할 때, 보기 중에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $\omega^2 + \omega + 1 = 0$　　㉡ $\omega^2 = 1$

㉢ $\omega^{99} + \dfrac{1}{\omega^{99}} = 2$　　㉣ $\omega^{1005} + \omega^{1004} = -\omega$

㉤ $\omega^{18} + \omega^{99} + \dfrac{1}{\omega^{99}} = 3$

① ㉠, ㉢　　② ㉡　　③ ㉠, ㉢, ㉣

④ ㉢, ㉣, ㉤　　⑤ ㉠, ㉢, ㉣, ㉤

해설

$x^3 - 1 = 0,$

$(x-1)(x^2+x+1) = 0$

$\Rightarrow \omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0,$

$\omega^2 = -1 - \omega \cdots$ ㉠, ㉡

$\omega^{99} + \dfrac{1}{\omega^{99}}$

$= (\omega^3)^{33} + \dfrac{1}{(\omega^3)^{33}} = 2 \cdots$ ㉢

$\omega^{1005} + \omega^{1004}$

$= (\omega^3)^{335} + (\omega^3)^{334} \times \omega^2$

$= \omega^2 + 1 = -\omega \cdots$ ㉣

$\omega^{18} + \omega^{99} + \dfrac{1}{\omega^{99}}$

$= (\omega^3)^6 + (\omega^3)^{33} + \dfrac{1}{(\omega^3)^{33}} = 3 \cdots$ ㉤

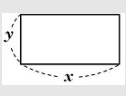
25. 가로의 길이가 세로의 길이보다 5 cm 더 긴 직사각형이 있다. 둘레의 길이가 34 cm 일 때, 이 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이의 곱을 구하여라.(단, 단위 생략)

▶ 답 :

▷ 정답 : 66

해설

직사각형의 가로, 세로의 길이를
각각 $x$cm, $y$cm 라 하면



$x = y + 5$ ⋯⋯ ㉠
또, 이 직사각형의 둘레는 $2(x + y)$ 이므로
$2(x + y) = 34$ 즉, $x + y = 17$ ⋯⋯ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$y + 5 + y = 17$, $2y = 12$
$\therefore\ y = 6$
$y = 6$ 을 ㉠에 대입하면 $x = 11$
$\therefore\ xy = 11 \times 6 = 66$